

**В. А. КУЗНЕЦОВ**  
**П. А. ТРУБАЕВ**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ УСТАНОВКАХ**

**БЕЛГОРОД**  
**2017**

**В. А. Кузнецов, П. А. Трубаев**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА  
В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ  
УСТАНОВКАХ**

Монография

Белгород  
2017

УДК 536.24:519.6

ББК 22, 31.3

К89

#### Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор Донецкого национального  
технического университета *А.Б. Бирюков*

Доктор технических наук, профессор Саратовского государственного  
технического университета им. Ю.А. Гагарина *А.В. Рулев*

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного  
технологического университета В.Г. Шухова *В.Г. Шаптала*

#### **Кузнецов, В. А.**

**T77** Математические модели тепломассопереноса в высоко-  
температурных установках: монография / В. А. Кузнецов,  
П. А. Трубаев. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. – 272 с.

ISBN 978-5-361-00519-2

В монографии рассмотрены математические модели турбулентного движения жидкости и газов, радиационно-конвективного теплообмена, теплопроводности и массопереноса при диффузионном горении топлива в высокотемпературных теплотехнологических установках.

Издание предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по направлению "Теплоэнергетика и теплотехника".

Публикуется в авторской редакции.

Монография подготовлена в рамках программы развития опорного университета на базе БГТУ им. В.Г. Шухова

**УДК 536.24:519.6**

**ББК 31.31**

ISBN 978-5-361-00519-2

© Кузнецов В.А., Трубаев П. А., 2017

© Белгородский государственный  
технологический университет  
(БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	6
<b>Глава 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ</b>	
§ 1. Гипотеза сплошной среды .....	11
§ 2. Дифференциальные уравнения переноса .....	14
§ 3. Способы перехода к дискретным уравнениям .....	18
§ 4. Приведение производных к дискретному виду .....	20
§ 5. Дискретное уравнение переноса массы .....	23
§ 6. Дискретное уравнение с центральными разностями ...	26
§ 7. Правила построения дискретных уравнений .....	29
§ 8. Дискретное уравнение с разностями против потока ...	31
§ 9. Уравнения в цилиндрических координатах .....	34
§ 10. Релаксация значений сеточной функции .....	37
§ 11. Линеаризация функций в дискретных уравнениях ....	39
§ 12. Итерационный метод решения системы уравнений ..	41
§ 13. Решение дискретных уравнений методом прогонки ..	43
§ 14. Метод полинейной прогонки .....	46
<b>Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ И ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЫ</b>	
§ 1. Силы, действующие в жидкости .....	48
§ 2. Законы внутреннего трения вязкой жидкости .....	50
§ 3. Дифференциальные уравнения Навье–Стокса .....	53
§ 4. Уравнения движения несжимаемой среды .....	55
§ 5. Система уравнений для массовой скорости .....	59
§ 6. Дискретные уравнения для массовой скорости .....	62
§ 7. Дискретное уравнение для функции давления .....	66
§ 8. Граничные условия к уравнениям движения .....	70
§ 9. Упрощенный алгоритм решения системы уравнений ..	74
§ 10. Уравнения в цилиндрических координатах .....	80
<b>Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ</b>	
§ 1. Статистические характеристики турбулентности .....	84

§ 2. Турбулентные напряжения сил внутреннего трения ...	86
§ 3. Гипотезы пристенной турбулентности .....	90
§ 4. Турбулентное движение вблизи гладкой стенки .....	94
§ 5. Неизотермический пограничный слой .....	99
§ 6. Граничные условия к уравнениям движения .....	101
§ 7. Стандартная модель турбулентности .....	105
§ 8. Реализуемая модель турбулентности .....	108
§ 9. Уравнения реализуемой модели турбулентности .....	111
§ 10. Граничные условия в моделях турбулентности .....	113
<b>Глава 4. ТЕПЛОТДАЧА, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС</b>	
§ 1. Способы переноса теплоты .....	116
§ 2. Виды теплообменных процессов .....	118
§ 3. Основные понятия теплоотдачи излучением .....	120
§ 4. Математическая модель теплопроводности .....	123
§ 5. Нестационарный теплоперенос в массивном теле ...	126
§ 6. Математическая модель нагрева гранулы .....	129
§ 7. Конвективный теплоперенос .....	132
§ 8. Граничные условия на поверхности стен .....	135
§ 9. Теплоотдача в турбулентном пограничном слое .....	138
§ 10. Проверка адекватности конвективной модели .....	139
<b>Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ В СЕЛЕКТИВНЫХ ГАЗАХ</b>	
§ 1. Основные понятия и определения .....	143
§ 2. Закономерности равновесного излучения .....	146
§ 3. Идеализированные и селективные спектры .....	148
§ 4. Коэффициенты поглощения водяного пара .....	154
§ 5. Коэффициенты поглощения углекислого газа .....	158
§ 6. Уравнения радиационного переноса энергии .....	161
§ 7. Радиационный перенос в неограниченной среде .....	165
§ 8. Расчетные уравнения радиационного переноса .....	167
§ 9. Перенос излучения в ограниченном объеме газа .....	170
§ 10. Расчет локального коэффициента поглощения .....	176

§ 11. Радиационный перенос в ослабляющей среде .....	181
§ 12. Расчетные уравнения для ослабляющей среды .....	187
<b>Глава 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА</b>	
§ 1. Уравнения радиационно-конвективного переноса ....	190
§ 2. Уравнения теплопереноса в ослабляющей среде ....	193
§ 3. Теплота диссоциации трехатомных газов .....	195
§ 4. Температура поверхности ограждающих стен .....	197
§ 5. Аккумуляция теплоты в стенах вращающейся печи ..	202
§ 6. Температура стен вращающейся печи .....	205
§ 7. Адекватность модели аккумуляции теплоты .....	208
§ 8. Оценка точности математической модели .....	211
<b>Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА</b>	
§ 1. Дифференциальные уравнения переноса массы .....	215
§ 2. Структура диффузионного факела .....	218
§ 3. Основы теории струйного течения .....	220
§ 4. Транспортирование воздуха турбулентной струей ...	224
§ 5. Размеры диффузионного факела .....	225
§ 6. Диффузионный факел во вращающейся печи .....	230
§ 7. Математическая модель диффузионного факела ....	233
§ 8. Вопросы моделирования кинетики горения .....	236
<b>Глава 8. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПРОМЫШЛЕННЫХ ПЕЧАХ</b>	
§ 1. Структура математической модели .....	239
§ 2. Обжиг цементного клинкера во вращающейся печи ..	242
§ 3. Формирование факела при обжиге клинкера .....	246
§ 4. Тепломассоперенос в печи обжига керамзита .....	250
§ 5. Диффузионный факел в стекловаренной печи .....	255
§ 6. Способ вычисления турбулентной вязкости .....	259
Заключение .....	262
Обозначения физических величин .....	263
Список литературы .....	267

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Производство стали и цветных металлов, цементного клинкера, керамических материалов и стеклоизделий осуществляется в промышленных печах, проектирование которых выполняется чаще всего на основе приближенных полуэмпирических зависимостей. Новые перспективы в этом отношении открывает применение современных методов математического моделирования, позволяющих воспроизводить численно и графически процессы тепломассообмена в высокотемпературных теплотехнологических установках.

В отличие от многих математически исследуемых явлений [1], теплотехнологические процессы в большинстве случаев осуществляются в сплошных средах. Их математические модели, как правило, ориентированы на численное решение достаточно сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Реальное практическое применение в этой области математическое моделирование получило в период ускоренного развития электронных вычислительных машин после опубликования ряда научных работ в доступном для инженеров изложении [2, 3]. Тогда же стала формироваться современная вычислительная гидродинамика как самостоятельное научное направление.

В меньшей степени были усовершенствованы алгоритмы численной реализации математических моделей в высокотемпературных установках. Несмотря на высокий профессиональный уровень математического описания в целом [4], оставались нерешенными многие методические проблемы, относящиеся, например, к радиационному переносу теплоты в селективных газах. В частности, в области радиационного теплообмена получили развитие зональные методы, которые предусматривают выделение в промышленных установках сравнительно небольшого количества поверхностных и объемных зон, излучающих, поглощающих и рассеивающих лучистую энергию. Зональный подход к процессам переноса излучения не только требует значительного расчетного време-

ни, но и плохо сочетается с численными методами решения дифференциальных уравнений динамики газообразной среды. Поэтому область математического моделирования сложного радиационно-конвективного теплообмена зональными методами ограничена преимущественно одномерными или двухмерными задачами [5].

Несмотря на то, что еще далеко не все проблемы численного моделирования решены, разрабатываются и в настоящее время получают заметное распространение коммерческие компьютерные программы широкого назначения. Чтобы осуществлять на их основе решение инженерных задач, многие действия по реализации компьютерного обеспечения передаются пользователям. Приобретая пакет компьютерных программ, инженеры должны выбрать технический объект для численного исследования, детально изобразить его геометрическую форму на экране монитора, правильно поставить граничные условия для всех применяемых дифференциальных уравнений на каждом участке граничной поверхности, определить физико-химические и теплофизические свойства взаимодействующих веществ, условия осуществления и тепловые эффекты химических реакций. В проблемных вопросах турбулентности и радиационного теплообмена предлагаются на выбор известные варианты математических моделей без гарантии достижения адекватного численного результата. Автоматическое построение сетки, пригодной для областей любой конфигурации, приводит к увеличению на порядок числа ее узлов и, поэтому, к возрастанию времени компьютерного счета.

В итоге самостоятельное создание инженерами математических моделей для задач тепломассопереноса в промышленных печах и топках становится вполне оправданным и не намного более сложным, чем освоение коммерческих моделирующих программных комплексов. При самостоятельной разработке появляется возможность более точно отразить в математической модели конкретные особенности технической задачи, использовать новейшие достижения численного моделирования для ее

решения и разностороннего анализа. Теоретические основы построения и реализации математических моделей, изложенные на доступном инженерном уровне в объеме, необходимом для начала самостоятельной работы, составляют содержание этой монографии.

Книга состоит из восьми глав. В первой из них приводится вывод дифференциального уравнения переноса в его обобщенной форме. Переход к дискретным алгебраическим аналогам выполнен простым, но достаточно надежным методом конечных объемов. Кратко излагаются способы компьютерного представления систем дискретных уравнений. Эта глава не содержит описания самих математических моделей и является лишь ознакомительным введением в численные методы решения дифференциальных уравнений переноса.

Во второй главе рассмотрена математическая модель движения среды в приближении несжимаемой жидкости, состоящая из четырех взаимозависимых дифференциальных уравнений (для трех компонент скорости и давления), и обоснован упрощенный алгоритм ее численной реализации. В третьей главе приведены основные диссипативные модели турбулентности, необходимые для расчета турбулентной вязкости. Значительное внимание уделено уточнению и модификации полуэмпирических гипотез пристенной турбулентности. На их основе сформулированы граничные условия в математической модели конвективно-переноса теплоты, рассмотренной в четвертой главе.

В пятой главе введено понятие гипотетической неограниченной среды и предложена концепция эквивалентного антисерого спектра для уточненной дифференциальной модели радиационного переноса теплоты в селективных газах. Ее дифференциальные уравнения применяются в качестве составной части в алгоритмах более общей математической модели сложного радиационно-конвективного теплообмена в поглощающих и ослабляющих средах, которая рассмотрена в шестой главе.

Седьмая глава посвящена математическим моделям массопереноса при диффузионном горении газообразного топлива. Наряду с численным, здесь изложен аналитический подход, позволяющий оценивать влияние условий горения на длину проточного диффузионного факела. При численной постановке задачи применен упрощенный способ расчета тепловыделения в диффузионном факеле с учетом того, что химические реакции горения в нем сосредоточены на фронте пламени.

В восьмой главе представлены характерные особенности математических моделей и приведены некоторые результаты численного моделирования процессов диффузионного горения и сложного радиационно-конвективного теплообмена в промышленных печах при производстве цементного клинкера, керамзита и стекломассы.

Книга предназначена в первую очередь магистрантам и аспирантам, обучающимся по направлению "Теплоэнергетика и теплотехника"; она будет полезна также инженерам и научным работникам отрасли. Для усвоения изложенного в ней материала не требуется знания специальных разделов математики. Чтобы лучше передать физическое содержание математических моделей, их изложение начинается с краткого определения терминов и вывода дифференциальных уравнений переноса. Особое внимание уделено математическим моделям, граничным условиям и алгоритмам, улучшающим сходимость итераций.

Хотя в монографии изложены лишь сравнительно простые численные методы решения дифференциальных уравнений, она не предназначена для легкого чтения. Эта книга ориентирована в основном на теоретическое обоснование алгоритмов, позволяющих с приемлемой точностью реализовать математические модели высокотемпературных процессов теплообмена. Их освоение даст возможность применять в дальнейшем более сложные и, возможно, более универсальные численные методы моделирования [6].

Некоторые из предложенных алгоритмов могут быть полезными также и специалистам по математическому моделированию. В модели движения несжимаемой жидкости применен упрощенный подход к нахождению поправки давления. Модификация полуэмпирических гипотез пристенной турбулентности Прандтля и Ван Драйста обеспечила корректную постановку граничных условий к уравнениям высокотемпературной конвективной теплоотдачи с применением крупной сетки при их численном решении. Уточнение дифференциальных уравнений радиационного переноса теплоты в рамках концепции эквивалентного антисерого спектра сняло ограничения, присущие методу диффузионного приближения, и позволило решить проблему переноса излучения в селективных газах с точностью приемлемой для инженерных приложений.

Детальные аспекты составления компьютерных программ, численно моделирующих процессы высокотемпературного теплопереноса, в данном издании не рассматриваются. Для записи дискретных уравнений здесь применена равномерная сетка. Заинтересованный исследователь сможет самостоятельно построить математическую модель на неравномерной сетке и, при необходимости, изучить способы построения разностной сетки в областях моделирования сложной формы.

Размерности величин приведены в разделе "Обозначения физических величин"; в тексте монографии размерности указываются только в необходимых случаях. В формулах и уравнениях они соответствуют Международной системе единиц.

Авторы благодарят своих коллег по кафедре энергетики теплотехнологии БГТУ им. В. Г. Шухова за многолетнее плодотворное сотрудничество.

## Глава 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### § 1. Гипотеза сплошной среды

В отличие от твердых тел, капельная жидкость и газы обладают свойством текучести, обусловленным их способностью изменять свою форму под действием незначительных сил. Капельная жидкость практически несжимаема. При скорости много меньшей скорости звука сжимаемость газов проявляется незначительно и при математическом моделировании теплотехнологических процессов обычно не учитывается.

Термодинамическое состояние жидкости и газа характеризуется термодинамической температурой  $T$  и статическим давлением  $p$ . От этих параметров зависит плотность газовой среды, определяемая по уравнению состояния совершенного газа:

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0T}, \quad (1.1)$$

где  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  – плотность, давление и температура газа при нормальных условиях, то есть при  $p_0 = 760$  мм рт. ст.,  $T_0 = 273,15$  К. Плотность капельной жидкости от давления не зависит.

Принято считать, что в жидкости и газах можно теоретически выделить очень малые элементарные объемы, каждый из которых все же содержит достаточно большое число молекул, необходимое для проявления физических свойств изучаемой среды. Это позволяет принять в качестве рабочей гипотезы, что элементарные объемы заполнены сплошной деформируемой средой. Гипотеза сплошной среды дает возможность применять математический анализ для исследования процессов переноса.

Для определения положения частиц сплошной среды в трехмерном пространстве во многих случаях используется декартова система координат  $(x, y, z)$ . В нестационарных процессах, параметры которых изменяются во времени, появляется четвертая координата  $t$ . В инженерных приложениях измеряют

и вычисляют локальные параметры среды в определенный момент времени чаще всего в фиксированных (неподвижных) точках пространства. Поскольку при этом координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  считаются независимыми переменными, изменение скорости и физических свойств элементов среды в заданных точках пространства представляют с помощью частных производных или частных дифференциалов.

Физическая величина, определенная в некоторой области, образует математическое поле – скалярное, векторное или тензорное. Скалярная величина, такая, например, как температура  $T$ , давление  $p$  или плотность  $\rho$ , в любой момент времени однозначно характеризуется своим значением в каждой точке пространства. Можно сказать, что скалярная величина имеет одну компоненту. Скорость  $\mathbf{v}$  является векторной величиной. Она характеризуется с помощью трех компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , направленных вдоль соответствующих осей координат. Производная вектора скорости имеет в трехмерном пространстве девять компонент:  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial u/\partial z$ ,  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial v/\partial y$ ,  $\partial v/\partial z$ ,  $\partial w/\partial x$ ,  $\partial w/\partial y$ ,  $\partial w/\partial z$ , и может рассматриваться как тензор.

Чтобы упростить запись громоздких тензорных величин, целесообразно пронумеровать оси координат и компоненты вектора скорости, обозначив их следующим образом  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$  и  $u_1 \equiv u$ ,  $u_2 \equiv v$ ,  $u_3 \equiv w$ . Тогда все девять компонент тензора ускорения можно представить одним выражением  $\partial u_i/\partial x_j$ , индексы которого  $i$  и  $j$  могут принимать значения 1, 2 или 3.

Математическое поле не только задает значения физических величин, но и позволяет охарактеризовать интенсивность их изменения в трехмерном пространстве. В каждой точке скалярного поля определяется его градиент, являющийся вектором. Градиент скалярной физической величины всегда направлен в сторону наибыстрейшего ее возрастания, задаваемую единичным вектором  $\mathbf{n}$ , и равен производной от физической величины  $\Phi$  по направлению  $\mathbf{n}$ :

$$\text{grad } \Phi \equiv (\partial\Phi/\partial n)\mathbf{n}.$$

При использовании проекций градиента на оси декартовой системы координат это выражение принимает следующий вид:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы (орты), направленные вдоль осей декартовой системы координат.

Пусть перенос физической величины  $\Phi$  через некоторую поверхность задается вектором плотности потока  $\mathbf{J}$ , направленным по нормали к этой поверхности. Изменение вектора  $\mathbf{J}$  определяется в каждой точке поля с помощью его дивергенции, которая является скаляром и вычисляется в декартовой системе координат как сумма частных производных от компонент  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  этого вектора по соответствующим осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\text{div}\mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Чтобы пояснить смысл дивергенции вектора  $\mathbf{J}$ , рассмотрим, как изменится поток физической величины  $\Phi$  в объеме элементарного параллелепипеда, выделенного в координатном пространстве (рис. 1.1).

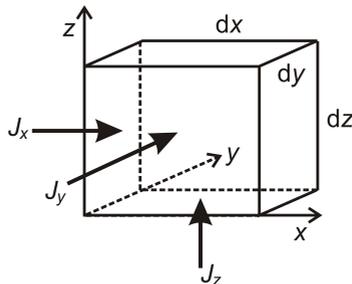


Рис. 1.1. Компоненты вектора плотности потока  $\mathbf{J}$  на входе в элементарный параллелепипед;  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  – размеры параллелепипеда

В общем случае каждая компонента  $J_x$ ,  $J_y$  или  $J_z$  вектора  $\mathbf{J}$  изменяется на величину, равную частному дифференциалу по соответствующей оси координат. Изменение потока физической величины  $\Phi$  будет представлено суммой произведений всех трех частных дифференциалов на площади граней элементарного параллелепипеда, через которые осуществляется перенос:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} dx(dydz) + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy(dzdx) + \frac{\partial J_z}{\partial z} dz(dxdy) = \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dV.$$

В итоге, поделив это выражение на объем параллелепипеда  $dV = dx dy dz$ , получим правую часть математической формулы дивергенции (1.3).

## § 2. Дифференциальные уравнения переноса

В основе математического описания тепловых и массообменных процессов в сплошной среде лежат фундаментальные законы сохранения и переноса массы, количества вещества, количества движения и теплоты. Закон сохранения скалярной физической величины в элементарном объеме, выделенном в координатном пространстве, запишем в виде уравнения:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial \tau} + \text{div} \mathbf{J}_k + \text{div} \mathbf{J}_d = S_v, \quad (1.4)$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $\tau$  – время;  $\Phi$  – сохраняемая физическая величина, имеющая размерность ее массовой концентрации;  $\mathbf{J}$  – вектор плотности потока этой физической величины;  $S_v$  – источниковый член уравнения. Русские индексы обозначают два возможных способа переноса физической величины: "к" – конвекцией, "д" – диффузией.

Первый член этого уравнения учитывает локальную нестационарность процесса. Он равен накопленному в элементарном объеме количеству физической величины  $\Phi$ , приведенному к единице объема и единице времени. Второй и третий члены уравнения, представленные составляющими дивергенции век-

тора плотности потока  $\mathbf{J}$ , являются приведенной к единице объема разностью между количествами сохраняемой физической величины, вышедшей из элементарного объема и вошедшей в него за единицу времени. Источниковый член уравнения  $S_v$  определяет возможный "источник" сохраняемой физической величины, приведенный к единице объема и единице времени. По сути дела, дифференциальное уравнение (1.4) выражает количественно баланс поступления и накопления сохраняемой физической величины в элементарном объеме пространства.

Связь между массовой концентрацией  $\Phi$  сохраняемой физической величины и плотностью ее потока устанавливают с помощью нескольких законов переноса.

Конвекцией называют перенос физической величины объемами сплошной среды, движущимися со скоростью  $\mathbf{v}$ . Для нее справедлив закон переноса следующего вида:

$$\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{v} \Phi, \quad (1.5)$$

Математическое описание диффузионного переноса вещества или энергии обычно имеет градиентную форму:

$$\mathbf{J}_d = -\rho k \text{grad } \Phi, \quad (1.6)$$

где  $k$  – обобщенное обозначение коэффициентов переноса (вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $a$  или диффузии  $D$ ).

Проекции векторных равенств (1.5) и (1.6) на оси декартовых координат дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_{k,x} &= \rho u \Phi, & J_{k,y} &= \rho v \Phi, & J_{k,z} &= \rho w \Phi, \\ J_{d,x} &= -\rho k \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & J_{d,y} &= -\rho k \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & J_{d,z} &= -\rho k \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

После замены дивергенции векторов  $\mathbf{J}_k$  и  $\mathbf{J}_d$  в уравнении (1.4) суммой частных производных (1.3), с учетом проекций векторных выражений (1.5) и (1.6) на оси координат, получим дифференциальное уравнение переноса общего вида, определяющее следующим образом функцию  $\Phi$  в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = S_v, \quad (1.7)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – продольная и поперечные компоненты скорости, направленные соответственно по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Левая часть уравнения переноса (1.7) содержит разные группы слагаемых, различающиеся своей математической структурой и физическим содержанием. Первое слагаемое, учитывающее зависимость локальных параметров процесса от времени, обычно называют нестационарным членом уравнения; следующие три слагаемых, описывающих перенос конвекцией, – конвективными; остальные слагаемые в левой части уравнения, учитывающие перенос посредством диффузии, называют диффузионными.

Можно предположить, что существуют процессы, интенсивность и результаты которых практически не зависят от переноса диффузией. В этом случае уравнение (1.7) будет представлено в следующем упрощенном виде:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \Phi}{\partial z} = S_v.$$

Такое дифференциальное уравнение, не содержащее производных второго порядка, часто называют параболическим. Время  $\tau$ , способное изменяться только в положительном направлении, образует здесь односторонне направленную координату.

При описании стационарных процессов, локальные параметры которых не зависят от времени, частная производная по времени равна нулю, так что левая часть уравнения (1.7) будет учитывать только пространственный перенос:

$$\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = S_v.$$

Дифференциальные уравнения такого вида обычно называют эллиптическими. Пространственные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в них являются двусторонними [3], поскольку изменение членов уравнения допускается здесь как в положительном, так и отрицательном направлении. Дифференциальное уравнение общего вида (1.7) является одновременно эллиптическим и параболическим.

Для решения дифференциального уравнения необходимо сформулировать условия однозначности конкретной задачи: установить форму и размеры расчетной области, задать физические свойства среды, поставить начальные и граничные условия, то есть указать начальное состояние нестационарного процесса и определить значения искомой функции на границах расчетной области.

Чаще всего применяют граничные условия первого, второго или третьего рода. Формулировка граничных условий первого рода самая простая – достаточно задать известные значения  $\Phi_{гр}$  искомой функции во всех точках участка границы, координаты которых обозначены здесь символами  $x_{гр}$ ,  $y_{гр}$ :

$$\Phi(x, y)|_{x_{гр}, y_{гр}} = \Phi_{гр}.$$

Формулируя граничные условия второго рода, в каждой точке на границе расчетной области задают значения производной искомой функции по направлению  $\mathbf{n}$ , нормальному к границе:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n} \Big|_{x_{гр}, y_{гр}} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{гр}.$$

Граничные условия третьего рода устанавливают во всех точках участка границы взаимосвязь производной искомой функции по нормали  $\mathbf{n}$  к границе и ее неизвестного значения на границе:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n} \Big|_{x_{гр}, y_{гр}} = f \left( \Phi \Big|_{x_{гр}, y_{гр}} \right).$$

Индексы у вертикальной черты в формулах для граничных условий указывают значения координат, при которых определяется искомая функция  $\Phi$  или ее производная.

### § 3. Способы перехода к дискретным уравнениям

Независимые переменные и функции дифференциального уравнения способны непрерывно изменяться во времени и в пространстве и, следовательно, могут принимать бесконечное число значений. Но, так как вычислительные возможности компьютеров ограничены, искомую функцию находят только в узлах сетки, которая накладывается на расчетную область. При этом диапазон непрерывного изменения значений координат заменяется дискретным конечным множеством узлов сетки.

Сетка может быть образована линиями или поверхностями, параллельными осям координат, как показано на рис. 1.2. Линии, параллельные оси  $y$ , размещены здесь по оси  $x$ , их номера обозначены символом  $i$ . Линии, параллельные оси  $x$ , распределены по оси  $y$ , их номера обозначены символом  $j$ . Точки, в которых линии пересекаются, называются узлами сетки и нумеруются каждая двумя цифрами  $(i, j)$  в двухмерной или тремя цифрами  $(i, j, k)$  в трехмерной системе координат.

В равномерной сетке расстояния  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  или  $\Delta z$  между координатными линиями остаются постоянными вдоль каждой из осей координат. Неравномерную сетку обычно применяют, чтобы расположить узлы сетки плотнее на участках с наибольшим градиентным изменением количественных характеристик процесса и этим повысить точность его моделирования.

Физические величины, определяемые в узлах сетки при численном решении дифференциальных уравнений, представляют собой сеточные функции. Алгебраические дискретные уравнения, применяемые для вычисления сеточных функций, являются аналогами дифференциальных уравнений. Переход к дискретным уравнениям должен осуществляться так, чтобы ос-

талось неизменным физическое содержание дифференциального уравнения. В частности, необходимо обеспечить для сеточных функций выполнение законов сохранения и переноса.

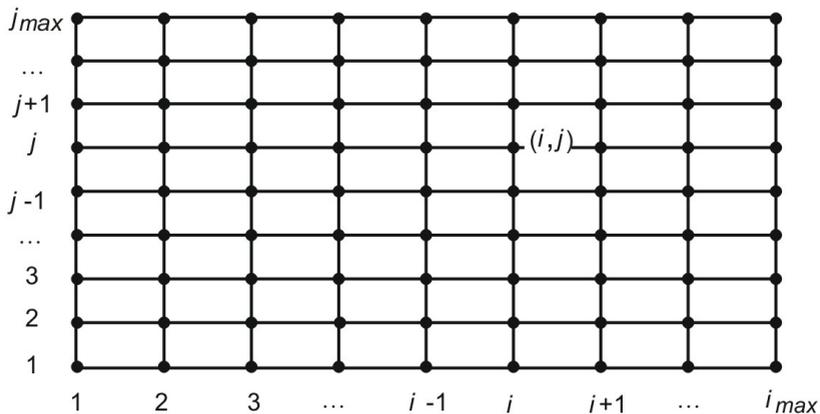


Рис. 1.2. Равномерная прямоугольная сетка для двумерной задачи:  
 $i, j$  – нумерация узлов сетки по осям  $x$  и  $y$

Имеется несколько способов дискретизации дифференциального уравнения. Наиболее простым, но не всегда достаточно надежным, является метод конечных разностей (МКР), с помощью которого производные в дифференциальных уравнениях заменяются конечными приращениями функций и координат. Метод конечных элементов (МКЭ), наоборот, считается более сложным. Он предусматривает построение дискретных уравнений в форме, адаптированной к условиям задачи, а для вычисления коэффициентов в полученных дискретных аналогах используются дифференциальные уравнения переноса.

В математических моделях для корректного перехода к дискретным уравнениям будем применять более простой метод конечных объемов (МКО). Его отличие от метода конечных разностей состоит в том, что дискретизации подвергаются интегралы от соответствующих членов дифференциальных уравнений, что в итоге обеспечивает выполнение законов сохранения.

#### § 4. Приведение производных к дискретному виду

При дискретизации дифференциальных уравнений частные производные в них могут заменяться конечными разностями по схеме, представленной на рис. 1.3.

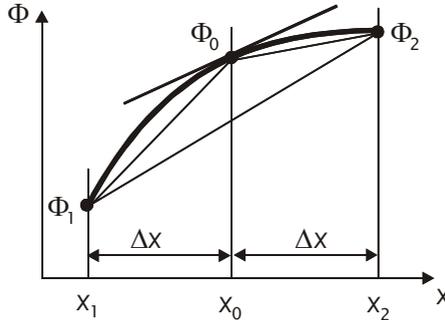


Рис. 1.3. Схема аппроксимации производной конечными разностями

Для перехода к конечным разностям искомую функцию  $\Phi(x)$  разлагают в ряд Тейлора вблизи узловой точки. Например, в окрестности точки  $x_0$  функция  $\Phi(x)$  разлагается в ряд по малым отрезкам  $\Delta x$  координаты  $x$  следующим образом:

$$\Phi(x) = \Phi_0 \pm \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x^2 \pm \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right)_0 \Delta x^3 + \dots$$

Будем считать, что величина отрезка  $\Delta x$  всегда положительна. Если при этом приращение координаты отрицательно, то перед членами ряда с нечетными производными следует ставить отрицательные знаки. В результате получим разложение функции  $\Phi(x)$  в ряд в точке  $x_2$  на рис. 1.3 при положительном приращении координаты  $x$ ,

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right)_0 \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right)_0 \Delta x^4 + \dots,$$

и в точке  $x_1$  при отрицательном приращении координаты  $x$ ,

$$\Phi_1 = \Phi_0 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^4 - \dots$$

Пусть известны значения  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  функции  $\Phi(x)$ . Тогда из записанных выше разложений ее в ряд Тейлора следуют два выражения для первой производной в форме ряда:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{\Phi_2 - \Phi_0}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^3 - \dots, \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right)_0 \Delta x^3 - \dots \quad (1.9)$$

Отбросив в этих равенствах все члены ряда, кроме первого, выполним аппроксимацию производной, то есть найдем ее приближенное представление в виде односторонних разностей значений функции  $\Phi(x)$  в двух соседних точках:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\Phi_2 - \Phi_0}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (1.10)$$

При отбрасывании членов ряда возникает погрешность, величина которой заранее неизвестна. Однако можно утверждать, что эта погрешность является ограниченной и сопоставима с величиной первого отброшенного слагаемого, содержащего вторую производную и малый множитель  $\Delta x$ . Символ  $O(\Delta x)$  в выражениях (1.10) как раз и обозначает ограниченную величину, которая имеет первый порядок аппроксимации, то есть при измельчении сетки уменьшается практически пропорционально  $\Delta x$ .

Чтобы получить меньшую погрешность аппроксимации первой производной данной функции, следует сложить разложения (1.8) и (1.9). Так как слагаемые с противоположными знаками при этом сократятся, результат будет следующим:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_0 \Delta x^2 - \frac{1}{120} \left(\frac{\partial^5\Phi}{\partial x^5}\right)_0 \Delta x^4 - \dots$$

Отбросив в правой части полученного равенства все члены ряда, кроме первого, найдем приближенное представление первой производной от функции  $\Phi(x)$  с помощью центральных разностей. В этом случае погрешность при измельчении сетки уменьшается в основном пропорционально  $\Delta x^2$ , так что можно считать, что достигается второй порядок аппроксимации:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (1.11)$$

При численном решении дифференциальных уравнений расстояние  $\Delta x$  выбирается очень малым ( $\Delta x \ll 1$ ), так что величина  $\Delta x^2$  будет много меньше, чем  $\Delta x$ . В результате погрешность  $O(\Delta x^2)$  аппроксимации первой производной центральными разностями (1.11) уменьшается при измельчении сетки значительно быстрее, чем погрешность  $O(\Delta x)$  ее аппроксимации односторонними разностями (1.10).

Такую же оценку погрешности аппроксимации можно получить, рассматривая первую производную с геометрической точки зрения как тангенс угла наклона к оси  $x$  касательной, проведенной на графике функции  $\Phi(x)$  в точке  $\Phi_0$  (см. рис. 1.3). При аппроксимации производной угол наклона касательной заменяется углом наклона одной из хорд. На рисунке видно, что в случае центральной разности хорда, соединяющая значения функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , заметно ближе по углу наклона к касательной, чем другие две хорды, соответствующие односторонним разностям.

Чтобы найти дискретное представление второй производной, разность приближенных выражений (1.10) для односторонних производных поделим на  $\Delta x$ :

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{\Phi_1 - 2\Phi_0 + \Phi_2}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

Более сложные дифференциальные выражения приводятся к дискретному виду методом конечных объемов.

## § 5. Дискретное уравнение переноса массы

Метод конечных объемов наилучшим образом обеспечивает выполнение законов сохранения при переходе от дифференциального уравнения к его дискретному алгебраическому аналогу. Расчетная область при этом разбивается на малые непересекающиеся контрольные объемы, каждый из которых содержит один узел сетки [3].

На рис. 1.4 представлен расчетный контрольный объем с центральным узлом  $P$ . Соседние контрольные объемы, центральные узлы  $W$ ,  $E$ ,  $S$  и  $N$  которых обозначены начальными буквами английских слов *west*, *east*, *south*, *north*, расположены соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ .

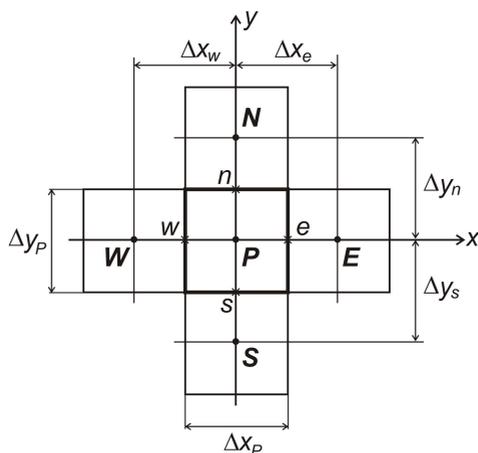


Рис. 1.4. Построение сетки в декартовых координатах:

$\Delta x_P$ ,  $\Delta y_P$  – размеры контрольного объема;

$\Delta x_w$ ,  $\Delta x_e$ ,  $\Delta y_s$ ,  $\Delta y_n$  – шаги сетки

Грани расчетного контрольного объема, проходящие через точки  $w$ ,  $e$ ,  $s$  и  $n$ , совпадают с гранями соседних контрольных объемов. Узлы сетки  $B$  и  $T$  (*bottom*, *top*) на оси  $z$ , так же как и соответствующие им точки  $b$  и  $t$  на гранях контрольного объема, перпендикулярных оси  $z$ , на рисунке не показаны.

Обозначения размеров контрольного объема  $\Delta x_p, \Delta y_p, \Delta z_p$  и шагов сетки  $\Delta x_w, \Delta x_e, \Delta y_s, \Delta y_n, \Delta z_b, \Delta z_t$ , снабженные нижними индексами, применяются для записи дискретных уравнений на неравномерной сетке. Для указания размеров и шагов равномерной сетки нижние индексы не требуются.

Наиболее простое по форме дискретное уравнение выражает закон сохранения массы. В этом случае функция  $\Phi$ , представляющая в дифференциальном уравнении (1.7) массовую концентрацию искомой физической величины, равна массе жидкой или газообразной среды, приходящейся на единицу массы той же самой среды, и, следовательно, равна единице. Так как градиент постоянной величины равен нулю, то диффузия не реализуется и диффузионные члены в этом уравнении отсутствуют. Источниковый член  $S_v$  уравнения равен нулю, так как масса не создается и не уничтожается. В результате, применительно к переносу массы сплошной среды, получим дифференциальное уравнение, известное в гидродинамике как уравнение неразрывности потока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (1.12)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируют по времени (от начала и до конца контрольного интервала  $\Delta \tau$ ) и по осям координат (от одной грани контрольного объема до другой):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta \tau} \int_0^e \int_0^t \int_0^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\tau \right) dx dy dz + \int_0^{\Delta \tau} \int_0^e \int_0^t \int_0^n \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau + \\ & + \int_0^{\Delta \tau} \int_0^e \int_0^t \int_0^n \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \right) dx dz d\tau + \int_0^{\Delta \tau} \int_0^e \int_0^t \int_0^n \left( \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \right) dx dy d\tau = 0. \end{aligned}$$

Во всех слагаемых записанного таким образом равенства математические выражения под знаками интегралов, заключенные в скобки, имеют вид частных дифференциалов. Поэтому

первое интегрирование по соответствующей переменной  $\tau$ ,  $x$ ,  $y$  или  $z$  даст результат в виде функции, находившейся в дифференциальном уравнении под знаком частной производной. В качестве верхних и нижних пределов интегрирования подставляют значения соответствующих сеточных функций в конце и в начале каждого интервала интегрирования:

$$\begin{aligned} & \int_{wsb}^{ent} [\rho_P - \rho_P^o] dx dy dz + \int_0^{\Delta\tau} \int_s^n \int_b^t [(\rho u)_e - (\rho u)_w] dy dz d\tau + \\ & + \int_0^{\Delta\tau} \int_w^e \int_b^t [(\rho v)_n - (\rho v)_s] dx dz d\tau + \int_0^{\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n [(\rho w)_t - (\rho w)_b] dx dy d\tau = 0. \end{aligned}$$

Нижние индексы  $P$ ,  $e$ ,  $w$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $t$  и  $b$  обозначают точки контрольного объема, в которых определены значения сеточных переменных. Верхний индекс "o" отмечает значение плотности в начале контрольного интервала времени. Если верхний индекс отсутствует, то величина  $\rho$  соответствует концу контрольного интервала времени  $\Delta\tau$ .

Дальнейшее интегрирование выполняется приближенно, поскольку не известно, как новые подинтегральные функции зависят от времени и координат. Обычно полагают, что в пределах малого интервала времени и малых размеров ячеек сетки они незначительно отличаются от своих значений в центре граней контрольного объема. Тогда выражения в квадратных скобках смогут быть вынесены за знаки интегрирования как практически постоянные величины, а определенные интегралы от оставшихся бесконечно малых приращений координат  $dx$ ,  $dy$ ,  $dw$ ,  $d\tau$  дадут конечные множители  $\Delta x_P$ ,  $\Delta y_P$ ,  $\Delta w_P$ ,  $\Delta\tau$ . После деления всех членов равенства на произведение  $\Delta x_P \Delta y_P \Delta w_P \Delta\tau$  получим дискретный аналог дифференциального уравнения (1.12):

$$\frac{\rho_P - \rho_P^o}{\Delta\tau} + \frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x_P} + \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{\Delta y_P} + \frac{(\rho w)_t - (\rho w)_b}{\Delta z_P} = 0. \quad (1.13)$$

Левая часть дискретного уравнения (1.13) определяет локальный источник массы, теоретически равный нулю. В численных методах его расчетное значение может отличаться от нуля.

### § 6. Дискретное уравнение с центральными разностями

Интегрирование дифференциального уравнения переноса (1.7) в общем виде по контрольному объему на рис. 1.4, выполненное по образцу предыдущего параграфа, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho\Phi)_P - (\rho\Phi)_P^0 \right] / \Delta\tau + \\ & + \frac{(\rho u\Phi)_e - (\rho u\Phi)_w}{\Delta x_P} + \frac{(\rho v\Phi)_n - (\rho v\Phi)_s}{\Delta y_P} + \frac{(\rho w\Phi)_t - (\rho w\Phi)_b}{\Delta z_P} - \\ & - \frac{1}{\Delta x_P} \left[ \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)_e - \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)_w \right] - \frac{1}{\Delta y_P} \left[ \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_n - \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_s \right] - \\ & - \frac{1}{\Delta z_P} \left[ \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_t - \left( \rho k \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_b \right] = S_{VP}. \end{aligned}$$

Теперь следует переписать полученное равенство так, чтобы каждое слагаемое в его левой части содержало значения сеточной функции в центральном узле  $P$  контрольного объема или в центральных узлах  $W, E, S, N, B, T$  соседних контрольных объемов. С этой целью заменим первые производные в диффузионных членах центральными конечными разностями по формуле (1.11). Простейшее преобразование конвективных членов уравнения (но далеко не лучшее) – рассчитывать значения  $\Phi_e, \Phi_w, \Phi_n, \Phi_s, \Phi_t, \Phi_b$  сеточной функции на гранях контрольного объема как среднее арифметическое ее значений в центральных узлах двух соседних контрольных объемов. Тогда искомая величина  $\Phi_P$  в центральном узле каждого контрольного объема

может быть связана со значениями сеточной функции  $\Phi_E$ ,  $\Phi_W$ ,  $\Phi_N$ ,  $\Phi_S$ ,  $\Phi_T$ ,  $\Phi_B$  в соседних узлах сетки следующей зависимостью:

$$\begin{aligned}
 & \Phi_P \left[ \frac{\rho_P}{\Delta\tau} + \frac{\rho_e U_e - \rho_w U_w}{2\Delta x_P} + \frac{\rho_n V_n - \rho_s V_s}{2\Delta y_P} + \frac{\rho_t W_t - \rho_b W_b}{2\Delta z_P} \right] + \\
 & + \Phi_P \left[ \frac{\rho_e K_e}{\Delta x_e \Delta x_P} + \frac{\rho_w K_w}{\Delta x_w \Delta x_P} + \frac{\rho_n K_n}{\Delta y_n \Delta y_P} + \frac{\rho_s K_s}{\Delta y_s \Delta y_P} + \frac{\rho_t K_t}{\Delta z_t \Delta z_P} + \frac{\rho_b K_b}{\Delta z_b \Delta z_P} \right] = \\
 & = \left[ \frac{\rho_e K_e}{\Delta x_e \Delta x_P} - \frac{\rho_e U_e}{2\Delta x_P} \right] \Phi_E + \left[ \frac{\rho_w K_w}{\Delta x_w \Delta x_P} + \frac{\rho_w U_w}{2\Delta x_P} \right] \Phi_W + \\
 & + \left[ \frac{\rho_n K_n}{\Delta y_n \Delta y_P} - \frac{\rho_n V_n}{2\Delta y_P} \right] \Phi_N + \left[ \frac{\rho_s K_s}{\Delta y_s \Delta y_P} + \frac{\rho_s V_s}{2\Delta y_P} \right] \Phi_S + \\
 & + \left[ \frac{\rho_t K_t}{\Delta z_t \Delta z_P} - \frac{\rho_t W_t}{2\Delta z_P} \right] \Phi_T + \left[ \frac{\rho_b K_b}{\Delta z_b \Delta z_P} + \frac{\rho_b W_b}{2\Delta z_P} \right] \Phi_B + \frac{\rho_P^0}{\Delta\tau} \Phi_P^0 + S_{VP}.
 \end{aligned}$$

Это уравнение построено по неявной схеме, так как его правая часть содержит неизвестные значения сеточной функции в соседних контрольных объемах в конце расчетного интервала времени  $\Delta\tau$ . Чтобы коэффициенты при конвективных членах, заключенные в скобки, имели одинаковые знаки в обеих частях уравнения, вычтем из него дискретное уравнение неразрывности (1.13), умноженное на  $\Phi_P$ :

$$\begin{aligned}
 & \Phi_P \left[ \frac{\rho_P^0}{\Delta\tau} + \frac{\rho_w U_w - \rho_e U_e}{2\Delta x_P} + \frac{\rho_s V_s - \rho_n V_n}{2\Delta y_P} + \frac{\rho_b W_b - \rho_t W_t}{2\Delta z_P} \right] + \\
 & + \Phi_P \left[ \frac{\rho_e K_e}{\Delta x_e \Delta x_P} + \frac{\rho_w K_w}{\Delta x_w \Delta x_P} + \frac{\rho_n K_n}{\Delta y_n \Delta y_P} + \frac{\rho_s K_s}{\Delta y_s \Delta y_P} + \frac{\rho_t K_t}{\Delta z_t \Delta z_P} + \frac{\rho_b K_b}{\Delta z_b \Delta z_P} \right] = \\
 & = \left[ \frac{\rho_e K_e}{\Delta x_e \Delta x_P} - \frac{\rho_e U_e}{2\Delta x_P} \right] \Phi_E + \left[ \frac{\rho_w K_w}{\Delta x_w \Delta x_P} + \frac{\rho_w U_w}{2\Delta x_P} \right] \Phi_W + \\
 & + \left[ \frac{\rho_n K_n}{\Delta y_n \Delta y_P} - \frac{\rho_n V_n}{2\Delta y_P} \right] \Phi_N + \left[ \frac{\rho_s K_s}{\Delta y_s \Delta y_P} + \frac{\rho_s V_s}{2\Delta y_P} \right] \Phi_S +
 \end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{\rho_t K_t}{\Delta z_t \Delta z_p} - \frac{\rho_t W_t}{2\Delta z_p} \right] \Phi_T + \left[ \frac{\rho_b K_b}{\Delta z_b \Delta z_p} + \frac{\rho_b W_b}{2\Delta z_p} \right] \Phi_B + \frac{\rho_P^0}{\Delta t} \Phi_P^0 + S_{VP}. \quad (1.14)$$

Дискретное уравнение (1.14) предназначено для численного моделирования на неравномерной сетке. Уравнения, построенные на равномерной сетке, несколько проще по своей структуре. Они и будут применяться при дальнейшем изложении математических моделей разного назначения.

Обычно дискретный алгебраический аналог дифференциального уравнения переноса (1.7) записывают в следующей обобщенной форме:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + d_P, \quad (1.15)$$

В нем коэффициенты  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$ ,  $a_B$ ,  $a_T$ ,  $a_P$  и свободный член уравнения  $d_P$  будут представлены следующими формулами, предназначенными для вычислений на равномерной сетке:

$$a_W = \frac{\rho_w K_w}{\Delta x^2} + \frac{\rho_w U_w}{2\Delta x}, \quad a_E = \frac{\rho_e K_e}{\Delta x^2} - \frac{\rho_e U_e}{2\Delta x}, \quad a_S = \frac{\rho_s K_s}{\Delta y^2} + \frac{\rho_s V_s}{2\Delta y},$$

$$a_N = \frac{\rho_n K_n}{\Delta y^2} - \frac{\rho_n V_n}{2\Delta y}, \quad a_B = \frac{\rho_b K_b}{\Delta z^2} + \frac{\rho_b W_b}{2\Delta z}, \quad a_T = \frac{\rho_t K_t}{\Delta z^2} - \frac{\rho_t W_t}{2\Delta z},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P^0 / \Delta t, \quad d_P = S_{VP} + \rho_P^0 \Phi_P^0 / \Delta t.$$

Дискретное уравнение с центральными разностями (1.15) определяет искомое значение  $\Phi_P$  сеточной функции как взвешенное среднее ее значений  $\Phi_W$ ,  $\Phi_E$ ,  $\Phi_S$ ,  $\Phi_N$ ,  $\Phi_B$  и  $\Phi_T$  в соседних узлах трехмерной сетки, взятых в конце контрольного интервала времени  $\Delta t$ , с учетом известного значения  $\Phi_P^0$  в начале этого интервала.

Как диффузионные, так и конвективные члены дискретного уравнения имеют второй порядок аппроксимации. Лишь нестационарный член дифференциального уравнения приводится к дискретному виду односторонними разностями и поэтому имеет первый порядок аппроксимации.

Очень важно, что значения коэффициентов переноса в дискретном уравнении (1.15) берутся в точках  $w$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $b$  и  $t$ , лежащих на гранях контрольного объема (см. рис. 1.4). В результате для каждого из двух соседних контрольных объемов расчетный поток физической величины  $\Phi$  через их общую грань будет одним и тем же в полном соответствии с законом сохранения.

## **§ 7. Правила построения дискретных уравнений**

При решении технической задачи дискретные уравнения вместе с начальными и граничными условиями образуют разностную схему, которая должна обладать свойством сходимости, то есть решение системы ее дискретных уравнений должно приближаться к точному решению дифференциального уравнения по мере того, как размеры ячеек сетки приближаются к нулю. Необходимыми условиями сходимости являются теоретически обоснованная корректная аппроксимация дифференциального уравнения и устойчивость разностной схемы.

Под устойчивостью понимают непрерывную зависимость результата решения задачи от входных данных (коэффициентов уравнений, начальных и граничных условий). Другими словами, малое изменение входных данных должно приводить к малому изменению результатов вычислений. В ходе решения задачи по неустойчивой схеме происходит быстрое возрастание погрешностей, результат расчета не достигается или становится физически неправдоподобным. Использование неустойчивых разностных схем в математическом моделировании недопустимо.

В устойчивой разностной схеме коэффициенты дискретного уравнения обладают следующими свойствами [3]:

- 1) все коэффициенты дискретного уравнения положительны (или, что то же самое, имеют один и тот же знак);
- 2) для стационарной задачи абсолютное значение коэффициента  $a_p$  в расчетном узле сетки больше или равно сумме абсолютных значений коэффициентов в соседних узловых точках:

$$|a_P| \geq |a_w| + |a_E| + |a_S| + |a_N| + |a_B| + |a_T|. \quad (1.16)$$

Если все коэффициенты в дискретном уравнении (1.15) положительны, то равенство (1.16) выполняется для него автоматически. Неравенство, задаваемое формулой (1.16), должно обязательно выполняться хотя бы в одной или нескольких точках расчетной области. Возможность достижения этого неравенства, появляется, например, при постановке граничных условий первого или третьего рода.

Следует обратить внимание на то, что дискретное уравнение (1.15) реализует лишь одну из многих возможных разностных схем. Так как неизвестные значения сеточной функции  $\Phi$ , соответствующие концу контрольного интервала времени  $\Delta t$ , входят не только в левую, но также и в правую часть этого уравнения, то его разностная схема, как это было уже отмечено, становится неявной. Преимущественное применение неявной схемы в задачах математического моделирования обычно объясняют ее безусловной устойчивостью при решении нестационарных задач.

Все же в задачах с конвекцией дискретное уравнение (1.15) нельзя считать безусловно устойчивым. Действительно, при повышенной скорости движения жидкости или газа (обычно при числе Рейнольдса  $Re > 1000$ ) коэффициенты этого дискретного уравнения могут стать отрицательными, что приводит к нарушению требования (1.16). Учитывая, что при измельчении сетки диффузионные составляющие коэффициентов возрастают быстрее, чем конвективные, условием достижения положительных значений коэффициентов дискретного уравнения и устойчивого решения задачи становится применение достаточно мелкой сетки. Для большинства технических задач это не приемлемо из-за чрезмерного возрастания времени счета. Более эффективной является дискретизация конвективных членов дифференциальных уравнений по схеме с разностями против потока.

## § 8. Дискретное уравнение с разностями против потока

Чтобы яснее представить себе характер влияния конвекции на физические параметры среды в контрольном объеме, предположим, что грани контрольного объема выполнены в виде непроницаемых стенок с отверстиями в них для входа и выхода потока жидкой или газообразной среды [3], как на рис. 1.5.

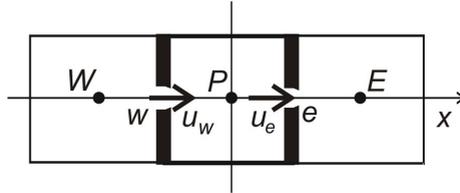


Рис. 1.5. Схема переноса теплоты через контрольный объем конвекцией

Если жидкость течет вдоль оси  $x$  и скорости  $u_w$  и  $u_e$  положительны, то очевидно, что значение  $\Phi_w$  функции в точке  $w$  на левой грани контрольного объема будет несколько ближе к ее значению  $\Phi_w$  в набегающем потоке, а значение  $\Phi_e$  функции в точке  $e$  на правой грани контрольного объема – ближе к ее значению  $\Phi_p$  в узле сетки  $P$ , также лежащем вверх по потоку. При изменении направления скорости изменятся и предполагаемые значения функции  $\Phi_w$  и  $\Phi_e$  на гранях контрольного объема.

Следовательно, если перенос физической величины конвекцией заметно преобладает над диффузионным переносом, то имеет смысл значения функции  $\Phi$  на гранях контрольного объема заменить ее значениями в узлах сетки, смещенных в направлении против потока. Так, если  $u_w > 0$ , то следует принять  $\Phi_w \approx \Phi_w$ , иначе  $\Phi_w \approx \Phi_p$ ; если же  $u_e > 0$ , то  $\Phi_e \approx \Phi_p$ , иначе  $\Phi_e \approx \Phi_e$ .

Эти соотношения можно записать в виде математических выражений, если компоненту скорости сравнивать с нулем при помощи компьютерной функции  $\max(a, b)$ , которая из двух величин  $a$  и  $b$  выбирает наибольшую:

$$\begin{aligned}
u_w \Phi_w &= \max(u_w, 0) \Phi_w - \max(-u_w, 0) \Phi_P, \\
u_e \Phi_e &= \max(u_e, 0) \Phi_P - \max(-u_e, 0) \Phi_E, \\
v_s \Phi_s &= \max(v_s, 0) \Phi_S - \max(-v_s, 0) \Phi_P, \\
v_n \Phi_n &= \max(v_n, 0) \Phi_P - \max(-v_n, 0) \Phi_N, \\
w_b \Phi_b &= \max(w_b, 0) \Phi_B - \max(-w_b, 0) \Phi_P, \\
w_t \Phi_t &= \max(w_t, 0) \Phi_P - \max(-w_t, 0) \Phi_T.
\end{aligned}$$

Если компонента скорости в представленных равенствах больше нуля, то второе слагаемое в их правой части становится равным нулю и, наоборот, если компонента скорости отрицательна, то нулевым становится первое слагаемое.

Эти выражения следует учесть на последнем этапе дискретизации дифференциального уравнения переноса (1.7). Сгруппировав все дискретные слагаемые, содержащие искомое значение физической величины  $\Phi_P$ , получим дискретное уравнение в той же обобщенной форме, что и уравнение (1.15), но с несколько иным набором коэффициентов:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + d_P, \quad (1.17)$$

Здесь коэффициенты и свободный член уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_W &= \frac{\rho_w K_w}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_w) + \frac{\rho_w}{\Delta x} \max(u_w, 0), & a_E &= \frac{\rho_e K_e}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_e) + \frac{\rho_e}{\Delta x} \max(-u_e, 0), \\
a_S &= \frac{\rho_s K_s}{\Delta y^2} f(\text{Pe}_s) + \frac{\rho_s}{\Delta y} \max(v_s, 0), & a_N &= \frac{\rho_n K_n}{\Delta y^2} f(\text{Pe}_n) + \frac{\rho_n}{\Delta y} \max(-v_n, 0), \\
a_B &= \frac{\rho_b K_b}{\Delta z^2} f(\text{Pe}_b) + \frac{\rho_b}{\Delta z} \max(w_b, 0), & a_T &= \frac{\rho_t K_t}{\Delta z^2} f(\text{Pe}_t) + \frac{\rho_t}{\Delta z} \max(-w_t, 0), \\
a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P^0 / \Delta \tau, & d_P &= S_{VP} + \rho_P^0 \Phi_P^0 / \Delta \tau.
\end{aligned}$$

Для повышения точности разностной схемы в коэффициенты дискретного уравнения введена поправочная функция, зависящая по степенному закону от сеточного числа Пекле  $\text{Pe}$ :

$$f(\text{Pe}) = \max \left[ \left( 1 - \frac{|\text{Pe}|}{10} \right)^5, 0 \right]. \quad (1.18)$$

Сеточное число Пекле снабжается индексом, указывающим точку на грани контрольного объема, в которой оно вычисляется:

$$\text{Pe}_w = \frac{u_w}{\kappa_w} \Delta x, \quad \text{Pe}_e = \frac{u_e}{\kappa_e} \Delta x, \quad \text{Pe}_s = \frac{v_s}{\kappa_s} \Delta y,$$

$$\text{Pe}_n = \frac{v_n}{\kappa_n} \Delta y, \quad \text{Pe}_b = \frac{w_b}{\kappa_b} \Delta z, \quad \text{Pe}_t = \frac{w_t}{\kappa_t} \Delta z.$$

Поправочная функция с числом Пекле приближенно учитывает характер изменения искомой функции  $\Phi$  в пределах контрольного объема [3]. Согласно (1.18), она принимает максимальное значение  $f(\text{Pe})=1$  при числе Пекле, равном нулю, то есть в неподвижной жидкости. При возрастании вклада конвекции в перенос физической величины  $\Phi$  поправочная функция постепенно уменьшается. Когда абсолютная величина сеточного числа Пекле достигает 10, то поправка становится равной нулю.

Устойчивость схемы с разностями против потока достигнута за счет снижения порядка аппроксимации конвективных членов в дискретном уравнении. Например, величина функции  $\Phi_e$  может быть представлена следующим разложением в ряд Тейлора, содержащим ее значение  $\Phi_P$  в узле  $P$  (см. рис. 1.5):

$$\Phi_e = \Phi_P + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_P \Delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_P \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right)_P \Delta x^3 + \dots$$

Отбросив все члены ряда, начиная со второго, приходим к выводу, что замена значения  $\Phi_e$  сеточной функции ее значением в соседнем узле сетки, находящимся вверх по потоку, соответствует лишь первому порядку аппроксимации:

$$\Phi_e = \Phi_P + O(\Delta x).$$

Несмотря на пониженный порядок аппроксимации, схема с разностями против потока оказывается на крупной сетке более точной, чем схема с центральными разностями.

### § 9. Уравнения в цилиндрических координатах

Если расчетная область ограничена цилиндрической поверхностью, то при численном моделировании тепломассообменных процессов становится целесообразным применение цилиндрических координат  $(x, r, \varphi)$ . Будем считать, что в этом случае ось  $x$  направлена по длине цилиндра, ось  $r$  по его радиусу, а координата  $\varphi$  представляет собой азимутальный угол поворота радиуса в поперечном сечении цилиндра.

Выражение для дивергенции вектора в цилиндрической системе координат отличается от формулы (1.3) тем, что оно учитывает изменение по радиусу  $r$  не только массового расхода жидкости, но и площади  $dF_r$  цилиндрических граней элементарного объема, показанного на рис. 1.6.

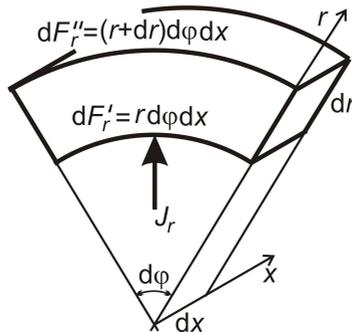


Рис. 1.6. Элементарный объем в цилиндрических координатах  $(x, r, \varphi)$ :

$J_r$  – радиальная компонента вектора плотности потока функции  $\Phi$ ;  
 $dF_r'$ ,  $dF_r''$  – площади цилиндрических граней этого объема

В результате формула дивергенции вектора  $\mathbf{J}$  в цилиндрических координатах приобретает следующий вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial(rJ_r)}{r\partial r} + \frac{\partial J_\varphi}{r\partial\varphi}. \quad (1.19)$$

Основное отличие этой формулы состоит в том, что радиальная координата  $r$  находится в ней под знаком дифференциала.

Проекции векторов (1.5) и (1.6) на оси цилиндрической системы координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_{k,x} &= \rho u \Phi, & J_{k,r} &= \rho v \Phi, & J_{k,\varphi} &= \rho w \Phi, \\ J_{d,x} &= -\rho k \frac{\partial\Phi}{\partial x}, & J_{d,r} &= -\rho k \frac{\partial\Phi}{\partial r}, & J_{d,\varphi} &= -\rho k \frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi}. \end{aligned}$$

Подставив в уравнение сохранения (1.4) выражение (1.19) для дивергенции векторов  $\mathbf{J}_k$  и  $\mathbf{J}_d$  с учетом их проекций на оси  $x$ ,  $r$ ,  $\varphi$ , получим дифференциальное уравнение переноса, определяющее скалярную функцию  $\Phi$  в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho\Phi}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho v\Phi}{r\partial r} + \frac{\partial\rho w\Phi}{r\partial\varphi} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho k \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho k \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\rho k \frac{\partial\Phi}{r\partial\varphi}\right) = S_v. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Отсюда при  $\Phi=1$  следует дифференциальное уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{r\partial r} + \frac{\partial\rho w}{r\partial\varphi} = 0.$$

Физический смысл членов дифференциального уравнения (1.20) остается тем же, что и в дифференциальном уравнении переноса (1.7), записанном в декартовых координатах.

Переход к дискретному алгебраическому аналогу дифференциального уравнения (1.20) осуществляем, интегрируя его по контрольному объему, изображенному на рис. 1.7.

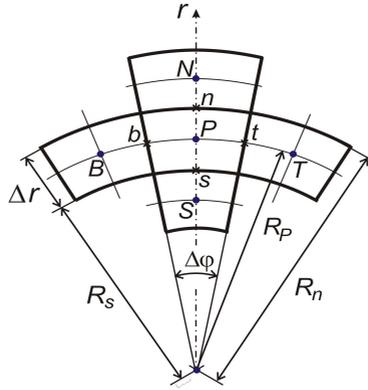


Рис. 1.7. Схема построения контрольных объемов в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$

Применив при этом разностную схему против потока, получим алгебраический дискретный аналог, записанный в обобщенной форме уравнения (1.17),

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + d_P. \quad (1.21)$$

Его коэффициенты учитывают криволинейность цилиндрической системы координат:

$$a_W = \frac{\rho_w K_w}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_w) + \frac{\rho_w}{\Delta x} \max(u_w, 0),$$

$$a_E = \frac{\rho_e K_e}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_e) + \frac{\rho_e}{\Delta x} \max(-u_e, 0),$$

$$a_S = \left( \frac{\rho_s K_s}{\Delta r^2} f(\text{Pe}_s) + \frac{\rho_s}{\Delta r} \max(v_s, 0) \right) \frac{r_s}{r_p},$$

$$a_N = \left( \frac{\rho_n K_n}{\Delta r^2} f(\text{Pe}_n) + \frac{\rho_n}{\Delta r} \max(-v_n, 0) \right) \frac{r_n}{r_p},$$

$$a_B = \frac{\rho_b K_b}{r_p^2 \Delta \varphi^2} f(\text{Pe}_b) + \frac{\rho_b}{r_p \Delta \varphi} \max(w_b, 0),$$

$$a_T = \frac{\rho_t K_t}{r_p^2 \Delta \varphi^2} f(\text{Pe}_t) + \frac{\rho_t}{r_p \Delta \varphi} \max(-w_t, 0),$$

$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_p^0 / \Delta\tau, \quad d_p = S_{VP} + \rho_p^0 \Phi_p^0 / \Delta\tau.$$

Не составит особого труда привести дискретные уравнения (1.17), (1.21) и их коэффициенты, снабженные буквенными индексами, к расчетному виду, в котором для нумерации узлов сетки применяются числовые индексы.

## § 10. Релаксация значений сеточной функции

При численной реализации математических моделей применяется метод итераций (последовательных приближений). В ходе итераций уточняются коэффициенты дискретных уравнений, зависящие от вычисляемых сеточных функций, что позволяет более полно учесть нелинейность и взаимовлияние процессов движения и тепломассопереноса.

Хотя ошибка машинного округления чисел накапливается только в пределах отдельной итерации и не сказывается на погрешности последующего расчета, приходится учитывать, что итерационное изменение вычисляемых величин может вызвать чрезмерно резкое увеличение или уменьшение зависящих от них коэффициентов дискретных уравнений, ухудшающее в конечном итоге сходимость итераций.

Для корректировки уровня изменения искомой функции или какой-либо физической величины может применяться их релаксация, задаваемая в процессе итераций формулой:

$$\bar{\Phi}_p = \alpha_p \Phi_p + (1 - \alpha_p) \Phi_p^*, \quad (1.22)$$

где  $\Phi_p$  и  $\Phi_p^*$  – значения функции, вычисленные в текущей и в предыдущей итерациях соответственно;  $\bar{\Phi}_p$  – расчетная величина, принимаемая в качестве значения сеточной функции, используемого в следующей итерации;  $\alpha_p$  – параметр релаксации.

В зависимости от принятого параметра релаксации различают нижнюю релаксацию (при  $\alpha_p < 1$ ), предназначенную для улучшения сходимости, и верхнюю релаксацию (при  $\alpha_p > 1$ ),

применяемую иногда для ускорения сходимости итераций. Нижняя релаксация снижает уровень изменения рассчитываемых величин, предотвращая их выход за пределы допустимых значений. Например, при релаксации с параметром  $\alpha_p = 0,5$  расчетное значение  $\bar{\Phi}_P$  сеточной функции становится равным среднему арифметическому между старым и вновь вычисленным ее значением.

Часто при практическом применении более удобным оказывается введение процедуры релаксации непосредственно в дискретные уравнения, например в уравнение (1.17):

$$a_P \Phi_P = \alpha_p (a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + d_P) + (1 - \alpha_p) a_P \Phi_P^*.$$

При вычислении нового значения сеточной функции  $\Phi_P$  в правую часть такого уравнения подставляется старое значение  $\Phi_P^*$  этой функции в том же узле сетки  $P$ , хранящееся в компьютерной памяти.

Обозначим символом  $R_p$  величину, обратную релаксационному множителю  $\alpha_p$ . Тогда после несложных математических преобразований дискретное уравнение, подвергаемое релаксации, будет приведено к следующему более удобному расчетному виду:

$$R_p a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + a_B \Phi_B + a_T \Phi_T + d_P + (R_p - 1) a_P \Phi_P^*. \quad (1.23)$$

Дискретное уравнение (1.23) отличается от уравнения (1.17) только тем, что в обе его части введены формально одинаковые слагаемые, содержащие одинаково обозначенные, но по существу разные значения функции  $\Phi_P$  в расчетном узле сетки  $P$ .

Нижняя релаксация реализуется здесь при значениях релаксационного множителя  $R_p$ , превышающих единицу. Например, при релаксации с множителем  $R_p = 2$  значение сеточной

функции  $\Phi_P$ , вычисленное в расчетном узле сетки, становится равной среднему арифметическому между ее значением  $\Phi_P^*$ , которое было найдено в предыдущей итерации в том же узле сетки, и тем ее значением, которое могло бы быть получено в текущей итерации без применения релаксации.

### § 11. Линеаризация функций в дискретных уравнениях

В источникный член  $S_V$  дифференциального уравнения переноса может входить с отрицательным знаком слагаемое, которое содержит искомую функцию  $\Phi$  [3]:

$$S_V = S_o - m\Phi^n,$$

где  $S_o$  – часть выражения, не зависящая от функции  $\Phi$ ;  $m$  – коэффициент пропорциональности;  $n$  – показатель степени.

Свободный член дискретного аналога (1.17) или (1.21) такого дифференциального уравнения составлен из слагаемых, имеющих противоположные знаки:

$$d_P = S_{VP} + \rho_P^o \Phi_P^o / \Delta\tau = S_{oP} + \rho_P^o \Phi_P^o / \Delta\tau - m(\Phi_P)^n. \quad (1.24)$$

В ходе итераций он может принимать поочередно как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от вычисляемой величины своей отрицательной части, что препятствует итерационному решению дискретных уравнений.

Чтобы обеспечить сходимость итераций, необходимо выполнить, по крайней мере, простейшую линеаризацию свободного члена дискретного уравнения. Для этого последнее слагаемое выражения (1.24) следует перенести в левую часть дискретного уравнения (1.17), выделив линейный множитель  $\Phi_P$  в качестве искомого значения сеточной функции и скорректировав выражение коэффициента  $a_P$ :

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P^o / \Delta\tau + m(\Phi_P)^{n-1}. \quad (1.25)$$

Более совершенный способ линеаризации, предложенный в [3], способствует улучшению сходимости итераций. На рис. 1.8

кривая 1 представляет в общем виде зависимость (1.24) свободного члена  $d_P$  дискретного уравнения от значения  $\Phi_P$  сеточной функции, изменяющегося в процессе итераций. Звездочкой здесь отмечены значения  $\Phi_P^*$  и  $d_P^*$ , вычисленные в предыдущей итерации.

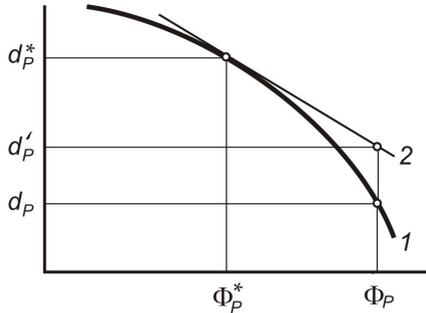


Рис. 1.8. Схема линейризации свободного члена дискретного уравнения:  
1 — функциональная зависимость; 2 — касательная

Новое значение свободного члена уравнения, которое будет вычислено в текущей итерации, приближенно прогнозируется посредством величины  $d'_P$ , которую получают, добавив к известному значению  $d_P^*$  приращение в виде частного дифференциала, записанного в дискретной форме:

$$d'_P = d_P^* + \left( \frac{\partial d_P}{\partial \Phi_P} \right)^* (\Phi_P - \Phi_P^*).$$

Подставим в эту формулу выражение (1.24):

$$\begin{aligned} d'_P &= (S_{oP} + \rho_P^o \Phi_P^o / \Delta \tau) - m(\Phi_P^*)^n - mn(\Phi_P^*)^{n-1}(\Phi_P - \Phi_P^*) = \\ &= (S_{oP} + \rho_P^o \Phi_P^o / \Delta \tau) + m(n-1)(\Phi_P^*)^n - mn(\Phi_P^*)^{n-1} \Phi_P. \end{aligned}$$

Применяя результат этих преобразований, получим новые выражения для коэффициента  $a_P$  и свободного члена  $d_P$  дискретных уравнений (1.17) и (1.21):

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P^0 / \Delta\tau + mn(\Phi_P)^{n-1}, \quad (1.26)$$

$$d_P = S_{oP} + \rho_P^0 \Phi_P^0 / \Delta\tau + m(n-1)(\Phi_P)^n. \quad (1.27)$$

После выполнения линеаризации все слагаемые в выражениях коэффициента  $a_P$  и свободного члена  $d_P$  дискретных уравнений принимают только положительные значения. Более того, выражения (1.26) и (1.27) обеспечивают выполнение неравенства (1.16), необходимого для устойчивости разностной схемы и сходимости итераций к искомому решению задачи.

Значения функции  $\Phi_P$ , входящие в коэффициенты  $a_P$  и  $d_P$ , автоматически берутся из памяти компьютера по результатам предыдущей итерации, так что никакими специальными значками они более не отмечаются. Выполненная линеаризация (1.26) и (1.27) отличается тем, что в обе части дискретных уравнений (1.17) и (1.21) добавлены формально одинаковые слагаемые  $mn(\Phi_P)^n$ , то есть, по сути дела, применена теоретически обоснованная релаксация типа (1.23).

## § 12. Итерационный метод решения системы уравнений

При численном решении задачи дискретное уравнение переноса (1.17) записывают единообразно для всех узлов сетки:

$$a_{i,j,k} \Phi_{i,j,k} = a_{i-1,j,k} \Phi_{i-1,j,k} + a_{i+1,j,k} \Phi_{i+1,j,k} + a_{i,j-1,k} \Phi_{i,j-1,k} + \\ + a_{i,j+1,k} \Phi_{i,j+1,k} + a_{i,j,k-1} \Phi_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1} \Phi_{i,j,k+1} + d_{i,j,k}. \quad (1.28)$$

Здесь нижние индексы  $i, j, k$  заменяют символ  $P$  центрального узла контрольного объема, индексы  $i \pm 1, j \pm 1, k \pm 1$  обозначают соответствующие узлы соседних контрольных объемов.

Если величины на гранях контрольных объемов снабдить индексами  $i \pm 1/2, j \pm 1/2$  или  $k \pm 1/2$ , то коэффициенты дискретного уравнения (1.28) примут следующий вид:

$$a_{i-1,j,k} = \frac{\rho_{i-1/2,j,k} K_{i-1/2,j,k}}{\Delta x^2} f\left(\text{Pe}_{i-1/2,j,k}\right) + \frac{\rho_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} \max\left(u_{i-1/2,j,k}, 0\right),$$

$$a_{i+1,j,k} = \frac{\rho_{i+1/2,j,k} \kappa_{i+1/2,j,k}}{\Delta x^2} f\left(\text{Pe}_{i+1/2,j,k}\right) + \frac{\rho_{i+1/2,j,k}}{\Delta x} \max\left(-u_{i+1/2,j,k}, 0\right),$$

$$a_{i,j-1,k} = \frac{\rho_{i,j-1/2,k} \kappa_{i,j-1/2,k}}{\Delta y^2} f\left(\text{Pe}_{i,j-1/2,k}\right) + \frac{\rho_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} \max\left(v_{i,j-1/2,k}, 0\right),$$

$$a_{i,j+1,k} = \frac{\rho_{i,j+1/2,k} \kappa_{i,j+1/2,k}}{\Delta y^2} f\left(\text{Pe}_{i,j+1/2,k}\right) + \frac{\rho_{i,j+1/2,k}}{\Delta y} \max\left(-v_{i,j+1/2,k}, 0\right),$$

$$a_{i,j,k-1} = \frac{\rho_{i,j,k-1/2} \kappa_{i,j,k-1/2}}{\Delta z^2} f\left(\text{Pe}_{i,j,k-1/2}\right) + \frac{\rho_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} \max\left(w_{i,j,k-1/2}, 0\right),$$

$$a_{i,j,k+1} = \frac{\rho_{i,j,k+1/2} \kappa_{i,j,k+1/2}}{\Delta z^2} f\left(\text{Pe}_{i,j,k+1/2}\right) + \frac{\rho_{i,j,k+1/2}}{\Delta z} \max\left(-w_{i,j,k+1/2}, 0\right),$$

$$a_{i,j,k} = a_{i-1,j,k} + a_{i+1,j,k} + a_{i,j-1,k} + a_{i,j+1,k} + a_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1} + \rho_{i,j,k}^0 / \Delta \tau,$$

$$d_{i,j,k} = (S_v)_{i,j,k} + \rho_{i,j,k}^0 \Phi_{i,j,k}^0 / \Delta \tau.$$

В итоге получим систему дискретных уравнений, число которых равно числу узлов сетки. Эта система может быть решена различными способами для каждого заданного момента времени.

Одним из наиболее простых итерационных способов решения системы алгебраических уравнений является метод Гаусса–Зейделя, который иногда называют методом последовательных смещений. При его реализации, последовательно перемещаясь из одного узла сетки в другой, вычисляют приближенные значения искомой функции  $\Phi_{i,j,k}$  в каждом узле сетки по значениям этой функции в соседних узлах и в предыдущий момент времени. В методе Гаусса–Зейделя в правую часть уравнения (1.17) подставляются значения сеточной функции  $\Phi_{i+1,j,k}^*$ ,  $\Phi_{i,j+1,k}^*$  и  $\Phi_{i,j,k+1}^*$  из предыдущей итерации, отмеченные здесь звездочками, и значения функции  $\Phi_{i-1,j,k}$ ,  $\Phi_{i,j-1,k}$ ,  $\Phi_{i,j,k-1}$ , только что вычисленные в текущей итерации:

$$\Phi_{i,j,k} = (a_{i-1,j,k} \Phi_{i-1,j,k} + a_{i+1,j,k} \Phi_{i+1,j,k}^* + a_{i,j-1,k} \Phi_{i,j-1,k} + a_{i,j+1,k} \Phi_{i,j+1,k}^* +$$

$$+ a_{i,j,k-1}\Phi_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1}\Phi_{i,j,k+1}^* + d_{i,j,k})/a_{i,j,k} .$$

Так как значения величин, полученные в предыдущей итерации, заменяются в ячейках оперативной памяти компьютера вновь вычисленными, то для реализации метода Гаусса–Зейделя в программном коде требуется лишь один массив значений сеточной функции без деления их на "старые" и "новые".

В каждой итерации значения сеточной функции рядом с границей уточняются с помощью заданных граничных условий. Лишь постепенно в ходе итераций это уточнение распространяется и на отдаленные узлы сетки. В итоге, итерационный метод последовательных смещений характеризуется медленной сходимостью.

Если достигнута сходимость итераций, то значения искомой функции, вычисленные по дискретным уравнениям, постепенно приближаются к физически достоверному решению дифференциального уравнения. Подтверждением итерационной сходимости обычно служит уменьшение и возможное стремление к нулю наибольшей относительной разности  $\delta\Phi_{i,j,k}$  значений сеточной функции в текущей и предыдущей итерациях:

$$\delta\Phi_{i,j,k} = (\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k}^*)/\Phi_{i,j,k} = (1 - \Phi_{i,j,k}^*/\Phi_{i,j,k}) \rightarrow 0 .$$

Для сходимости итераций необходимо, по меньшей мере, выполнение условия (1.16) устойчивости разностной схемы.

### § 13. Решение дискретных уравнений методом прогонки

С целью уменьшения числа итераций, требуемых для решения задачи с заданной точностью, применяют метод прогонки, который первоначально был разработан для одномерных дискретных уравнений с постоянными коэффициентами [7].

Дискретное уравнение (1.17) для одномерной задачи можно записать следующим образом:

$$a_{i,j}\Phi_i = a_{i,j-1}\Phi_{i-1} + a_{i,j+1}\Phi_{i+1} + d_i .$$

Нижний индекс  $i$  при коэффициентах уравнения обозначает порядковый номер узла сетки, в котором вычисляется сеточное значение функции  $\Phi_i$ , а индексы  $i-1$  и  $i+1$  – номера соседних узлов сетки. Такая система линейных алгебраических уравнений, постоянные коэффициенты которой  $a_{i,i-1}$ ,  $a_{i,i}$ ,  $a_{i,i+1}$  образуют трехдиагональную матрицу, может быть сравнительно легко решена методом Гаусса исключения неизвестных, получившим применительно к данному частному случаю название метода прогонки.

Чтобы получить расчетные формулы метода прогонки, перепишем дискретное уравнение (1.17) для одномерной задачи с новыми обозначениями его коэффициентов, что позволит ограничиться при них одним нижним индексом:

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i-1} + c_i \Phi_{i+1} + d_i. \quad (1.29)$$

Будем искать решение задачи с помощью линейной зависимости, устанавливающей одностороннюю связь между значениями  $\Phi_{i-1}$  и  $\Phi_i$  сеточной функции в соседних узлах сетки:

$$\Phi_{i-1} = P_{i-1} \Phi_i + S_{i-1}.$$

Подставим это выражение в уравнение (1.29), чтобы исключить из него  $\Phi_{i-1}$ :

$$a_i \Phi_i = b_i (P_{i-1} \Phi_i + S_{i-1}) + c_i \Phi_{i+1} + d_i.$$

Затем, перегруппировав слагаемые, приведем полученное уравнение к расчетной формуле метода прогонки:

$$(a_i - b_i P_{i-1}) \Phi_i = c_i \Phi_{i+1} + b_i S_{i-1} + d_i,$$

или

$$\Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + S_i, \quad (1.30)$$

где коэффициенты прогонки  $P_i$  и  $S_i$  вычисляются с помощью рекуррентных формул через коэффициенты и свободный член исходного дискретного уравнения (1.29),

$$P_i = \frac{c_i}{a_i - b_i P_{i-1}}, \quad S_i = \frac{b_i S_{i-1} + d_i}{a_i - b_i P_{i-1}}. \quad (1.31)$$

Вычисление искомой функции  $\Phi_i$  методом прогонки выполняют в два приема. Сначала, перемещаясь в направлении возрастания индекса  $i$ , находят коэффициенты прогонки по формулам (1.31). Эта операция называется прямой прогонкой. Затем в процессе обратной прогонки, перемещаясь в направлении уменьшения индекса  $i$ , вычисляют значения искомой функции по уравнению (1.30).

Чтобы учесть граничные условия задачи, перед началом прямой прогонки вычисляют коэффициенты  $P_1$  и  $S_1$  на первой границе, полагая, что отсутствие в сетке узла с номером  $i=0$  равноценно равенству нулю коэффициента  $b_1$  в уравнении (1.29). Тогда из формул (1.31) следует, что

$$P_1 = c_1/a_1, \quad S_1 = d_1/a_1. \quad (1.32)$$

В частности, если заданы граничные условия первого рода, то уравнение (1.29) в первом узле сетки принимает вид равенства  $\Phi_1 = d_1$ , откуда находим, что  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = c_1 = 0$  и, следовательно,  $P_1 = 0$ ,  $S_1 = \Phi_1$ .

Если значение  $\Phi_m$  искомой функции в точке  $i=m$ , лежащей на второй границе, не задано, то его вычисляют перед обратной прогонкой. Отсутствие в сетке узла с номером  $i=m+1$  равноценно нулевому коэффициенту  $c_m$  в уравнении (1.29) и, следовательно, равенству нулю прогоночного коэффициента  $P_m$ . В таком случае значение искомой функции на второй границе получают из (1.30):

$$\Phi_m = S_m. \quad (1.33)$$

Одномерная прогонка относится к прямым (неитерационным) методам численного решения системы дискретных уравнений, в которых значения искомой функции на границах передаются во все узлы сетки в ходе одной итерации. Если коэффи-

коэффициенты дискретного уравнения (1.29) постоянны, то для получения его решения на одномерной сетке достаточно выполнить прямую и обратную прогонку лишь однократно. Если же коэффициенты дискретного уравнения зависят от вычисляемых значений сеточных функций, то метод прогонки совмещается с итерациями, в ходе которых эти коэффициенты уточняются.

#### § 14. Метод полинейной прогонки

Двухмерные и трехмерные задачи можно решать методом полинейной прогонки, выполняемой в любом координатном направлении [3]. С этой целью трехмерное дискретное уравнение (1.28) приводится для каждой оси координат к виду (1.29), применяемому для одномерной прогонки,

– по направлению вдоль оси  $x$ :

$$a_i \Phi_{i,j,k} = b_i \Phi_{i-1,j,k} + c_i \Phi_{i+1,j,k} + d_i, \quad (1.34)$$

– по направлению вдоль оси  $y$ :

$$a_j \Phi_{i,j,k} = b_j \Phi_{i,j-1,k} + c_j \Phi_{i,j+1,k} + d_j, \quad (1.35)$$

– по направлению вдоль оси  $z$ :

$$a_k \Phi_{i,j,k} = b_k \Phi_{i,j,k-1} + c_k \Phi_{i,j,k+1} + d_k. \quad (1.36)$$

При использовании обозначений дискретного уравнения (1.28) коэффициенты уравнений полинейной прогонки (1.34) – (1.36) вычисляются следующим образом:

$$a_i = a_j = a_k = a_{i,j,k},$$

$$b_i = a_{i-1,j,k}, \quad b_j = a_{i,j-1,k}, \quad b_k = a_{i,j,k-1},$$

$$c_i = a_{i+1,j,k}, \quad c_j = a_{i,j+1,k}, \quad c_k = a_{i,j,k+1},$$

$$d_i = a_{i,j-1,k} \Phi_{i,j-1,k} + a_{i,j+1,k} \Phi_{i,j+1,k} + a_{i,j,k-1} \Phi_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1} \Phi_{i,j,k+1} + d_{i,j,k},$$

$$d_j = a_{i-1,j,k} \Phi_{i-1,j,k} + a_{i+1,j,k} \Phi_{i+1,j,k} + a_{i,j,k-1} \Phi_{i,j,k-1} + a_{i,j,k+1} \Phi_{i,j,k+1} + d_{i,j,k},$$

$$d_k = a_{i-1,j,k} \Phi_{i-1,j,k} + a_{i+1,j,k} \Phi_{i+1,j,k} + a_{i,j-1,k} \Phi_{i,j-1,k} + a_{i,j+1,k} \Phi_{i,j+1,k} + d_{i,j,k}.$$

Здесь слагаемые дискретного уравнения (1.29), не относящиеся к выделенному направлению, сгруппированы в свободных членах уравнений (1.34) – (1.36) полинейной прогонки.

Применение полинейной прогонки обеспечивает ускорение численного решения дискретных уравнений лишь в выделенном для нее направлении. В других координатных направлениях фактически осуществляется метод последовательных смещений, которому свойственна замедленная сходимость итераций. Поэтому, решая двумерные и трехмерные задачи для скалярных функций, целесообразно выполнять полинейную прогонку поочередно в разных координатных направлениях.

Наиболее полно преимущества прямых алгоритмов решения многомерных дискретных задач проявляются в методе матричной прогонки. Однако этот метод не столь прост в реализации и не столь универсален, как полинейная прогонка. Кроме того, в современных технических задачах, где применяются сетки, содержащие сотни тысяч узлов, трехмерная матричная прогонка сопровождается в каждой итерации значительным возрастанием погрешности машинного округления чисел, что приводит, как минимум, к замедлению сходимости итераций.

## Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ И ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЫ

### § 1. Силы, действующие в жидкости

Течение жидкости и газов подчиняется универсальному закону сохранения количества движения. Применяя этот закон, надо иметь в виду, что обмен количеством движения жидкой частицы с другими частями жидкости или с внешней средой принимает форму силового взаимодействия.

Различают два вида сил – массовые и поверхностные. К массовым силам относятся силы дальнего действия, пропорциональные массе жидкости. Например, при изменении вектора скорости элементарной жидкой частицы возникает сила инерции, равная произведению массы частицы на ее ускорение. Также и сила тяжести, действующая на элементарный объем жидкости, определяется как произведение массы этой жидкости на ускорение свободного падения.

К поверхностным силам относятся силы давления и вязкости, пропорциональные площади той поверхности, к которой они приложены. Радиус действия поверхностных сил чрезвычайно мал; он соизмерим с межмолекулярными расстояниями.

Величина поверхностной силы, приходящаяся на единицу площади, называется напряжением силы. Различают нормальные и касательные напряжения, направленные соответственно по нормали или по касательной к поверхности их приложения.

Давление  $p$  является нормальным напряжением. Оно всегда направлено по нормали к любой площадке, выделенной в жидкой или газообразной среде, как это показано на рис. 2.1. Хотя сила давления является вектором, статическое давление  $p$  считается скаляром, величина которого не зависит направления силы давления.

При движении вязкой жидкости ее частицы обмениваются друг с другом количеством движения, так что между ними возникает сила внутреннего трения. Напряжение силы внутреннего

трения  $\sigma_{ij}$  представляет собой тензорную величину. Здесь индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей.

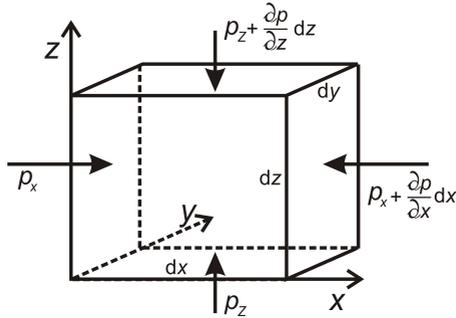


Рис. 2.1. Силы давления, действующие на элемент жидкости по осям  $x$  и  $z$

Таким образом, тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  имеет девять компонент, которые в декартовой системе координат  $x, y, z$  можно записать в виде следующей матрицы:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Компоненты тензора напряжений, действующие на грани элементарного объема, выделенного в жидкой среде, представлены на рис. 2.2.

Условимся, что первый индекс обозначает направление силы, второй индекс – направление нормали к элементарной площадке, на которую действует сила. Тогда напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ , направленные по оси  $x$ , можно считать составляющими вектора  $\sigma_x$ , напряжения  $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$ , направленные по оси  $y$ , – составляющими вектора  $\sigma_y$  и напряжения  $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ , направленные по оси  $z$ , составляющими вектора  $\sigma_z$  (см. рис. 2.2).

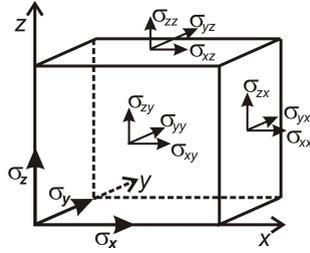


Рис. 2.2. Напряжения силы внутреннего трения на гранях элементарного объема:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  – векторы, суммирующие напряжения по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$

Тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , возникающих в жидкости, является симметричным, вследствие чего допускается перестановка индексов в обозначении его компонент:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

## § 2. Законы внутреннего трения вязкой жидкости

При течении жидкости ее частицы деформируются, изменяя свои размеры и форму. Например, под воздействием разности скоростей элементарный объем жидкости длиной  $dx$  и высотой  $dy$  может удлиняться на величину абсолютной деформации  $d^2x$  при растяжении (рис. 2.3, а) или изменять свою форму при сдвиге (рис. 2.3, б). Относительная деформация  $d\varepsilon$  определяется как отношение абсолютной деформации к начальному размеру элемента жидкости: при растяжении  $d\varepsilon = d^2x/dx$ , при сдвиге  $d\varepsilon = d^2x/dy$ .

Закон внутреннего трения при движении вязкой жидкости устанавливает линейную зависимость напряжения  $\sigma$  силы трения от скорости деформации элементов жидкости  $d\varepsilon/d\tau$  (но не от величины деформации  $\varepsilon$ , что характерно для твердых тел):

$$\sigma = -\mu d\varepsilon/d\tau, \tag{2.1}$$

где  $\tau$  – время,  $\mu$  – коэффициент пропорциональности.

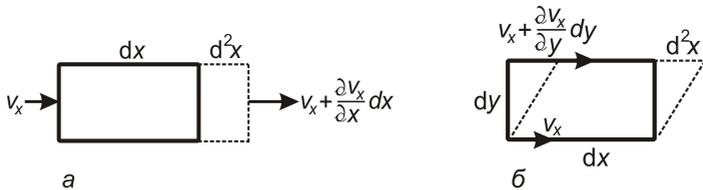


Рис. 2.3. Деформация жидкой частицы жидкости под воздействием градиента скорости: а – при удлинении; б – при сдвиге

Наиболее наглядно этот закон проявляется при одномерном течении, например при изменении скорости  $v$  только по направлению  $\mathbf{n}$  (рис. 2.4). В этом случае, введя в формулу (2.1) выражение относительной деформации  $\varepsilon$  при сдвиге и поменяв местами приращения времени  $d\tau$  и координаты  $dn$ , получим в числителе формулы дифференциал  $dv$  скорости  $v$ :

$$\sigma = -\mu \frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\mu \frac{d^2x/dn}{d\tau} = -\mu \frac{d}{dn} \left( \frac{dx}{d\tau} \right) = -\mu \frac{dv}{dn}.$$

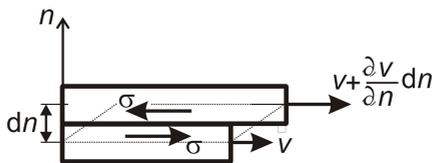


Рис. 2.4. Возникновение силы внутреннего трения в вязкой жидкости

Результирующая зависимость принимает, таким образом, форму закона внутреннего трения Ньютона,

$$\sigma = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (2.2)$$

Знак минус указывает здесь на то, что перенос количества движения происходит в направлении противоположном возрастанию скорости.

В случае трехмерного движения несжимаемой жидкости компоненты напряжений определяются более сложными линейными соотношениями, предложенными Стоксом, которые удобно представить в тензорной форме [8]:

$$\sigma_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

Здесь индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей. Выражение в скобках в формуле (2.3) образовано компонентами тензора скоростей деформации. Таким образом, Стоксом были установлены следующие линейные соотношения компонент тензора напряжений и тензора скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \sigma_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma_{zz} &= -2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \sigma_{zx} = \sigma_{xz} &= -\mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты вектора скорости, направленные по соответствующим осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  в линейных соотношениях (2.3) называется динамическим коэффициентом вязкости. По своему физическому смыслу он представляет собой силу внутреннего трения, действующую на единице площади при градиенте скорости, равном единице. Отсюда следует и его размерность Па·с.

Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  является физическим параметром, величина которого зависит от интенсивности молекулярного взаимодействия между соседними частицами жидкости или газа. С повышением температуры вязкость капельных жидкостей уменьшается, так как при этом ослабевают

силы молекулярного притяжения. Вязкость газов, наоборот, увеличивается с повышением температуры за счет более интенсивного движения молекул и усиления молекулярного обмена количеством движения в газообразной среде.

Часто для характеристики интенсивности молекулярного переноса количества движения в жидкости и газах применяют кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , равный отношению динамического коэффициента вязкости к плотности среды:

$$\nu \equiv \mu/\rho.$$

Единицей измерения этого коэффициента служит  $\text{м}^2/\text{с}$ .

### § 3. Дифференциальные уравнения Навье–Стокса

Закон сохранения количества движения (в форме второго закона механики Ньютона) применяют к движущейся элементарной частице жидкости объемом  $dV$ , записывая баланс сил вдоль каждой из декартовых координатных осей,

$$\text{– по оси } x: \quad \rho \frac{du}{dt} dV = -\frac{\partial p}{\partial x} dx(dydz) - (\text{div} \sigma_x) dV,$$

$$\text{– по оси } y: \quad \rho \frac{dv}{dt} dV = -\frac{\partial p}{\partial y} dy(dzdx) - (\text{div} \sigma_y) dV,$$

$$\text{– по оси } z: \quad \rho \frac{dw}{dt} dV = -\frac{\partial p}{\partial z} dz(dxdy) - (\text{div} \sigma_z) dV - \rho g dV.$$

Левые части этих равенств можно рассматривать как составляющие силы инерции. Их правые части представляют собой результирующие силы давления и вязкости, приложенные к элементарному параллелепипеду. Кроме того, в последнее равенство добавлена величина силы тяжести, действующая в отрицательном направлении вертикальной оси  $z$ .

Запишем дивергенции векторов  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  в тензорном поле по аналогии с формулой (1.3):

$$\operatorname{div} \sigma_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \sigma_y = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \sigma_z = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.$$

Затем, поделив все слагаемые уравнений баланса сил на объем элементарного параллелепипеда  $dV$  и заменив в их левой части полную производную по времени суммой частных производных по времени и координатам, получим систему дифференциальных уравнений сохранения количества движения вязкой жидкости или газа :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \rho g.$$

Их левая часть преобразуется к виду, более удобному для численного моделирования движения жидкости, если к ней добавить равную нулю левую часть уравнения неразрывности (1.12), умноженную на соответствующую компоненту скорости:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \rho g.$$

Подстановка соотношений Стокса (2.3) в правые части полученных равенств приводит к дифференциальным уравнениям Навье–Стокса движения несжимаемой вязкой жидкости:

- для скорости  $u$ ,

$$\frac{\partial p u}{\partial t} + \frac{\partial p u u}{\partial x} + \frac{\partial p v u}{\partial y} + \frac{\partial p w u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \quad (2.4)$$

- для скорости  $v$ ,

$$\frac{\partial p v}{\partial t} + \frac{\partial p u v}{\partial x} + \frac{\partial p v v}{\partial y} + \frac{\partial p w v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \quad (2.5)$$

- для скорости  $w$ ,

$$\frac{\partial p w}{\partial t} + \frac{\partial p u w}{\partial x} + \frac{\partial p v w}{\partial y} + \frac{\partial p w w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \rho g. \quad (2.6)$$

По своему физическому смыслу члены уравнений (2.4) – (2.6) можно рассматривать как приведенные к единице объема массовые и поверхностные силы, действующие на выделенный элементарный объем жидкости или газа.

#### § 4. Уравнения движения несжимаемой среды

Уравнения Навье–Стокса, выражающие закон сохранения количества движения, являются основными дифференциальными уравнениями переноса в динамике вязкой жидкости. Совместно с дифференциальным уравнением неразрывности потока (1.12) они устанавливают связь между компонентами скорости и полем давления.

Все же следует отметить, что дифференциальные уравнения (2.4) – (2.6) имеют достаточно сложную структуру, которую в некоторых частных случаях удается заметно упростить.

Прежде всего, имеет смысл рассматривать здесь только стационарное, установившееся движение среды, что позволяет приравнять к нулю производную по времени.

Кроме того, выполним преобразование математических выражений, заключенных в квадратные скобки, выделив в них группу слагаемых, содержащих производные от переменной плотности:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial \rho u}{\partial x} - v u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \rho v}{\partial x} - v v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial \rho w}{\partial x} - v w \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{\partial \rho u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \equiv \delta' u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial \rho u}{\partial y} - v u \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \rho v}{\partial y} - v v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial \rho w}{\partial y} - v w \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{\partial \rho u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \equiv \delta' v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial \rho u}{\partial z} - v u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \rho v}{\partial z} - v v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial \rho w}{\partial z} - v w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{\partial \rho u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \equiv \delta' w. \end{aligned}$$

Здесь переменная плотность  $\rho$  введена под знак производной по правилу дифференцирования произведения двух функ-

ций, затем выделена и приравнена к нулю сумма слагаемых, составляющих левую часть стационарного уравнения неразрывности. Остались выражения, в которых частные производные от плотности и вязкости образуют в большинстве случаев лишь небольшие поправки  $\delta'u$ ,  $\delta'v$ ,  $\delta'w$  к диффузионным членам упрощенного дифференциального уравнения движения.

Заслуживает внимания способ обобщенного представления силы тяжести в уравнениях Навье–Стокса. Чтобы записать силу тяжести более просто и однотипно для всех осей координат, может быть применено понятие функции давления, предложенное в [9] к среде с постоянной плотностью:

$$\tilde{p} = p + \rho gh ,$$

где  $h$  – вертикальная координата.

Учитывая, что при разных началах отсчета вертикальные координаты  $h$  и  $z$  отличаются друг от друга на постоянную величину, производная от которой равна нулю, замена давления  $p$  функцией давления  $\tilde{p}$  при постоянной плотности среды вводит силу тяжести в уравнение (2.6) неявно:

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g .$$

Функция давления  $\tilde{p}$  имеет одинаковые значения в каждой точке однородной изотермической среды, что дает возможность упростить постановку граничных условий при решении ряда технических задач. В случае переменной плотности жидкости или газа в производных от функции давления появляются слагаемые, избыточные для уравнений Навье–Стокса:

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = -\frac{\partial(p + \rho gh)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - \frac{\partial \rho}{\partial z} gh .$$

Чтобы компенсировать их величину, в правую часть уравнений Навье–Стокса добавляются такие же слагаемые с производными от плотности, но взятые с противоположным знаком [10].

В результате предложенных преобразований дифференциальные уравнения переноса количества движения приобретают следующий единообразный вид:

- для скорости  $u$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} g h + \delta' u, \end{aligned} \quad (2.7)$$

- для скорости  $v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} g h + \delta' v, \end{aligned} \quad (2.8)$$

- для скорости  $w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} g h + \delta' w. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тензорные обозначения переменных позволяют представить эти уравнения в компактной форме:

$$\frac{\partial \rho u_j u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g h + \delta' u_i.$$

Здесь индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей. Кроме того, применяется соглашение о том, что сумма трех членов, имеющих в уравнении одинаковую структуру, заменяется в тензорной записи одним слагаемым с повторяющимся в нем индексом (в данном случае в слагаемых левой части уравнения повторяется индекс  $j$ ).

Первая группа слагаемых в левой части уравнений (2.7) – (2.9) учитывает конвективный перенос количества движения путем направленного перемещения элементарных объемов жидкости, вторая группа слагаемых – диффузионный перенос количества движения вследствие хаотичного молекулярного движения. Правая часть уравнений представляет перенос количества движения под действием градиента давления и силы тяжести.

### § 5. Система уравнений для массовой скорости

Общепринятый подход состоит в том, что искомыми функциями в уравнениях Навье–Стокса считаются компоненты линейной скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Однако при численном моделировании движения высокотемпературных газов, особенно в области горения топлива, наблюдается сильная зависимость линейной скорости от переменной плотности среды, что приводит к возрастанию погрешности аппроксимации. Поэтому для задач теплопереноса более приемлемым оказывается численное решение уравнений движения относительно компонент массовой скорости  $(\rho u)$ ,  $(\rho v)$ ,  $(\rho w)$ , при аппроксимации которых погрешности приближенного представления плотности и линейной скорости частично компенсируют друг друга. Сеточные значения массовой скорости необходимы также для численного моделирования конвективного переноса теплоты в высокотемпературных газах. Чтобы произведение  $(\rho v)$  плотности на линейную скорость воспринималось как единый символ массовой скорости, оно в дальнейшем заключается в скобки.

Для перехода к новым переменным преобразуем диффузионные члены уравнений (2.7) – (2.9), применив правило дифференцирования произведения двух функций при вводе переменной плотности под знаки дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right], \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right].
\end{aligned}$$

Слагаемые в квадратных скобках, содержащие производные от переменной плотности, можно рассматривать как поправку к упрощенной записи уравнений переноса количества движения для массовой скорости в качестве искомой функции.

Подстановка полученных выражений в дифференциальные уравнения (2.7) – (2.9) приводит последние к следующему виду:

- для массовой скорости  $(\rho u)$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho u)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) &= \\
&= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} g h + \delta u, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

- для массовой скорости  $(\rho v)$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho v)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \right) &= \\
&= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} g h + \delta v, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

- для массовой скорости ( $\rho w$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho w)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} gh + \delta w. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Диффузионные поправки  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  в этих уравнениях отличаются от аналогичных поправок  $\delta'u$ ,  $\delta'v$ ,  $\delta'w$  в уравнениях (2.7) – (2.9) дополнительными слагаемыми, учитывающими воздействие переменной плотности на движение среды. Они представлены следующими дифференциальными выражениями:

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial y} + v v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v u \frac{\partial \rho}{\partial z} + v w \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \\ \delta v &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial x} + v u \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v v \frac{\partial \rho}{\partial z} + v w \frac{\partial \rho}{\partial y} \right), \\ \delta w &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial x} + v u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial y} + v v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( v w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Влияние этих поправок на результаты вычисления массовой скорости в большинстве случаев невелико и в основном зависит от пространственного распределения плотности среды, которое определяется процессами тепломассопереноса.

В тензорных обозначениях дифференциальные уравнения (2.10) – (2.12) записываются одной строкой:

$$\frac{\partial u_j(\rho u)_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial(\rho u)_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g h + \delta u_i .$$

Полезно напомнить, что по правилам тензорной записи здесь предполагается суммирование членов уравнения по повторяющемуся в них индексу  $j$ , принимающему значения 1, 2 и 3.

## § 6. Дискретные уравнения для массовой скорости

Коэффициенты в дискретных уравнениях для компонент массовой скорости несколько отличаются по своему виду от типового представления дискретных коэффициентов в уравнении (1.17). Поэтому ниже показано для примера, как выполняется интегрирование дифференциального уравнения (2.10) по контрольному объему, изображенному на рис. 1.4.

Для массовой скорости  $(\rho u)_P$ , вычисляемой в узле  $P$  в центре контрольного объема, результат такого интегрирования имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & [u_e(\rho u)_e - u_w(\rho u)_w] \Delta y \Delta z + [v_n(\rho u)_n - v_s(\rho u)_s] \Delta x \Delta x + [w_t(\rho u)_t - w_b(\rho u)_b] \Delta x \Delta y - \\ & - \left[ v_e \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right)_e - v_w \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta z - \left[ v_n \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_n - v_s \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta x - \\ & - \left[ v_t \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right)_t - v_b \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right)_b \right] \Delta x \Delta y = -[\tilde{p}_e - \tilde{p}_w] \Delta y \Delta z + \\ & + [\rho_e - \rho_w] g h_P \Delta y \Delta z + \Delta u_P \Delta x \Delta y \Delta z , \end{aligned}$$

где  $\Delta u_P$  – поправка в дискретном виде к уравнению (2.10).

Массовые скорости в конвективных членах полученного дискретного равенства следует заменить следующими выражениями, составленными в соответствии с разностной схемой "против потока":

$$\begin{aligned} u_w(\rho u)_w & \approx \max(u_w, 0)(\rho u)_w + [u_w - \max(u_w, 0)](\rho u)_P , \\ u_e(\rho u)_e & \approx -\max(-u_e, 0)(\rho u)_E + [u_e + \max(-u_e, 0)](\rho u)_P , \end{aligned}$$

$$v_s(\rho u)_s \approx \max(v_s, 0)(\rho u)_S + [v_s - \max(v_s, 0)](\rho u)_P,$$

$$v_n(\rho u)_n \approx -\max(-v_n, 0)(\rho u)_N + [v_n + \max(-v_n, 0)](\rho u)_P,$$

$$w_b(\rho u)_b \approx \max(w_b, 0)(\rho u)_B + [w_b - \max(w_b, 0)](\rho u)_P,$$

$$w_t(\rho u)_t \approx -\max(-w_t, 0)(\rho u)_T + [w_t + \max(-w_t, 0)](\rho u)_P.$$

Нетрудно убедиться, что значения массовой скорости на гранях расчетного контрольного объема в левой части этих равенств заменяются величиной массовой скорости в центральных узлах контрольных объемов  $P$ ,  $W$ ,  $E$ ,  $S$ ,  $N$ ,  $B$  или  $T$ , лежащих вверх по течению потока. В результате такой замены коэффициенты в дискретном уравнении перед массовой скоростью в узле  $P$  и в соседних узлах сетки приобретают знаки, соответствующие правилу (1.16) построения дискретных уравнений.

После представления первых производных в диффузионных членах в виде конечных разностей дискретное уравнение для продольной массовой скорости  $(\rho u)_P$  приводится к следующей форме:

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_S(\rho u)_S + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T +$$

$$-(\tilde{\rho}_e - \tilde{\rho}_w)/\Delta x + d_P^{(u)}. \quad (2.13)$$

Коэффициенты переноса  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$ ,  $a_B$ ,  $a_T$  в этом уравнении определяются для разностной схемы "против потока", по сути дела, аналогично коэффициентам к дискретному уравнению (1.17) при условии исключения из последних плотности среды:

$$a_W = \frac{v_w}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_w) + \frac{\max(u_w, 0)}{\Delta x}, \quad a_E = \frac{v_e}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_e) + \frac{\max(-u_e, 0)}{\Delta x},$$

$$a_S = \frac{v_s}{\Delta y^2} f(\text{Pe}_s) + \frac{\max(v_s, 0)}{\Delta y}, \quad a_N = \frac{v_n}{\Delta y^2} f(\text{Pe}_n) + \frac{\max(-v_n, 0)}{\Delta y},$$

$$a_B = \frac{v_b}{\Delta z^2} f(\text{Pe}_b) + \frac{\max(w_b, 0)}{\Delta z}, \quad a_T = \frac{v_t}{\Delta z^2} f(\text{Pe}_t) + \frac{\max(-w_t, 0)}{\Delta z},$$

$$d_P^{(u)} = \frac{\rho_e - \rho_w}{\Delta x} gh_P + \Delta u_P .$$

Следует обратить внимание на то, что, по сравнению с уравнением (1.17), в коэффициент  $a_P^{(u)}$  левой части дискретного уравнения (2.13) вошли дополнительно три дискретных слагаемых дивергенции вектора линейной скорости:

$$a_P^{(u)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y} + \frac{w_t - w_b}{\Delta z} .$$

В стационарной задаче их целесообразно заменить по уравнению неразрывности (1.12) суммой производных от плотности, помноженных на соответствующие компоненты скорости, согласно следующему равенству:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 ,$$

или в дискретном виде:

$$\frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y} + \frac{w_t - w_b}{\Delta z} = u_P \frac{\rho_w - \rho_e}{\rho_P \Delta x} + v_P \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_P \Delta y} + w_P \frac{\rho_b - \rho_t}{\rho_P \Delta z} .$$

(2.14)

Это выражение приобретает ненулевые значения только в неизотермической или неоднородной среде, и к нему может быть применена нижняя релаксация. Учитывая, что слагаемые в правой части равенства (2.14), не содержащие искомой компоненты скорости, в некоторых случаях могут приводить к заметному ухудшению сходимости итераций, будет полезным вычислять их лишь после того, как в процессе итераций стабилизируется расчетное температурное поле.

В приближенном расчете такого рода коэффициент  $a_P^{(u)}$  в левой части дискретного уравнения (2.13) примет вид:

$$a_P^{(u)} \approx a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + u_P \frac{\rho_w - \rho_e}{\rho_P \Delta x} .$$

С помощью преобразований, аналогичных использованным при выводе уравнения (2.13), записываются дискретные уравнения для остальных двух компонент массовой скорости:

$$a_P^{(v)}(\rho v)_P = a_W(\rho v)_W + a_E(\rho v)_E + a_S(\rho v)_S + a_N(\rho v)_N + a_B(\rho v)_B + a_T(\rho v)_T + \\ - (\tilde{p}_n - \tilde{p}_s)/\Delta y + d_P^{(v)}, \quad (2.15)$$

$$a_P^{(w)}(\rho w)_P = a_W(\rho w)_W + a_E(\rho w)_E + a_S(\rho w)_S + a_N(\rho w)_N + a_B(\rho w)_B + a_T(\rho w)_T + \\ - (\tilde{p}_t - \tilde{p}_b)/\Delta z + d_P^{(w)}. \quad (2.16)$$

Коэффициенты в правой части этих уравнений вычисляются в соответствующих контрольных объемах по таким же формулам, что и в дискретном уравнении (2.13). Отличаются лишь коэффициенты  $a_P^{(v)}$  и  $a_P^{(w)}$  при записи их в приближенном виде,

$$a_P^{(v)} \approx a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + v_P \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho_P \Delta y},$$

$$a_P^{(w)} \approx a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + w_P \frac{\rho_b - \rho_t}{\rho_P \Delta z},$$

и свободные члены уравнений,

$$d_P^{(v)} = \frac{\rho_n - \rho_s}{\Delta y} gh_P + \Delta v_P, \quad d_P^{(w)} = \frac{\rho_t - \rho_b}{\Delta z} gh_P + \Delta w_P.$$

Обеспечив сходимость итераций в расчете по приближенным уравнениям, следует уточнить результаты численного моделирования, применив полную версию (2.14) дискретного представления дивергенции линейной скорости.

Поправки  $\Delta u_P$ ,  $\Delta v_P$ ,  $\Delta w_P$  к дискретным уравнениям являются здесь результатом конечно-разностной аппроксимации дифференциальных выражений  $\delta u_P$ ,  $\delta v_P$ ,  $\delta w_P$ . Они применяются в тех случаях, когда требуется повысить точность численного решения уравнений математической модели.

## § 7. Дискретное уравнение для функции давления

Распределение вектора скорости в расчетной области тесно связано с полем давления. Уравнения Навье–Стокса служат обычно для вычисления трех компонент скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Поэтому для определения величины давления  $p$  приходится применять уравнение неразрывности, которое в своем первоначальном виде (1.12) не содержит давления. Покажем, как выполняется преобразование дискретного уравнения неразрывности к форме, пригодной для расчета функции давления.

Прежде всего, запишем дискретное уравнение неразрывности (1.13) для стационарного движения, приравняв к нулю изменение плотности среды по времени:

$$\frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_t - (\rho w)_b}{\Delta z} = 0. \quad (2.17)$$

Следует обратить внимание на то, что это уравнение содержит значения массовой скорости, определенные в точках  $w$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $b$ ,  $t$  на гранях контрольного объема, показанного на рис. 2.5, в то время как уравнениями (2.13) – (2.16) предусмотрено их вычисление в центральных узлах контрольных объемов.

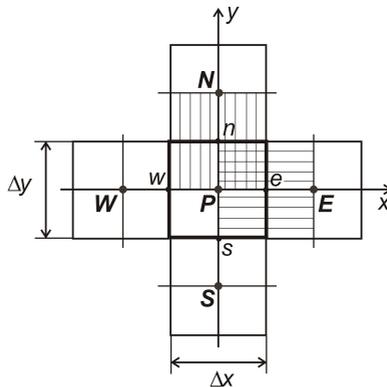


Рис. 2.5. Схема смещения контрольных объемов (заштрихованных) для компонент массовой скорости  $(\rho u)$  и  $(\rho v)$  относительно контрольного объема для функции давления

Чтобы учесть своеобразие разностной схемы, применяют разнесенную (или "шахматную") сетку [3], в которой контрольные объемы для компонент скорости смещены на полшага вдоль осей координат относительно контрольного объема для функции давления. На разнесенной сетке (см. рис. 2.5) расчетные узлы для компонент массовой скорости  $(\rho u)$  и  $(\rho v)$  находятся в точках  $w, e$  и  $s, n$ , лежащих на гранях контрольного объема с центральным узлом  $P$  для функции давления.

При выводе дискретного уравнения для функции давления дискретные выражения компонент массовой скорости (2.13), (2.15) и (2.16) записывают в следующей компактной форме с временным применением вместо индекса  $P$  новых обозначений  $w, e, s, n, b, t$  центральных узлов в контрольных объемах для компонент скорости (см. рис. 2.5):

$$\begin{aligned} (\rho u)_w &= (\rho \hat{u})_w - \frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_W}{a_w^{(u)} \Delta x}, & (\rho u)_e &= (\rho \hat{u})_e - \frac{\tilde{p}_E - \tilde{p}_P}{a_e^{(u)} \Delta x}, \\ (\rho v)_s &= (\rho \hat{v})_s - \frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_S}{a_s^{(v)} \Delta y}, & (\rho v)_n &= (\rho \hat{v})_n - \frac{\tilde{p}_N - \tilde{p}_P}{a_n^{(v)} \Delta y}, \\ (\rho w)_b &= (\rho \hat{w})_b - \frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_B}{a_b^{(w)} \Delta z}, & (\rho w)_t &= (\rho \hat{w})_t - \frac{\tilde{p}_T - \tilde{p}_P}{a_t^{(w)} \Delta z}. \end{aligned}$$

Символами  $(\rho \hat{u})_w \dots (\rho \hat{w})_t$  обозначены компоненты так называемой псевдоскорости, вычисляемые в соответствующих контрольных объемах по уравнениям, аналогичным уравнениям (2.13), (2.15) и (2.16), но без учета градиента функции давления:

$$\begin{aligned} a_P^{(u)} (\rho \hat{u})_P &= a_W (\rho u)_W + a_E (\rho u)_E + a_S (\rho u)_S + a_N (\rho u)_N + a_B (\rho u)_B + a_T (\rho u)_T + d_P^{(u)}, \\ a_P^{(v)} (\rho \hat{v})_P &= a_W (\rho v)_W + a_E (\rho v)_E + a_S (\rho v)_S + a_N (\rho v)_N + a_B (\rho v)_B + a_T (\rho v)_T + d_P^{(v)}, \\ a_P^{(w)} (\rho \hat{w})_P &= a_W (\rho w)_W + a_E (\rho w)_E + a_S (\rho w)_S + a_N (\rho w)_N + a_B (\rho w)_B + a_T (\rho w)_T + d_P^{(w)}. \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение неразрывности (2.17) выражений для компонент массовой скорости, записанных выше в компактной форме, вводит в него сеточную функцию давления:

$$\frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_W}{a_w^{(u)} \Delta x^2} - \frac{\tilde{p}_E - \tilde{p}_P}{a_e^{(u)} \Delta x^2} + \frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_S}{a_s^{(v)} \Delta y^2} - \frac{\tilde{p}_N - \tilde{p}_P}{a_n^{(v)} \Delta y^2} + \frac{\tilde{p}_P - \tilde{p}_B}{a_b^{(w)} \Delta z^2} - \frac{\tilde{p}_T - \tilde{p}_P}{a_t^{(w)} \Delta z^2} +$$

$$- \frac{(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e}{\Delta x} - \frac{(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n}{\Delta y} - \frac{(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t}{\Delta z} = 0.$$

Это равенство может быть приведено к общепринятой дискретной форме:

$$A_P^{(p)} \tilde{p}_P = A_W \tilde{p}_W + A_E \tilde{p}_E + A_S \tilde{p}_S + A_N \tilde{p}_N + A_B \tilde{p}_B + A_T \tilde{p}_T + D_P, \quad (2.18)$$

где коэффициенты уравнения определяются следующими выражениями в обозначениях, относящихся к контрольному объему для функции давления,

$$A_W = 1/(a_w^{(u)} \Delta x^2), \quad A_E = 1/(a_e^{(u)} \Delta x^2),$$

$$A_S = 1/(a_s^{(v)} \Delta y^2), \quad A_N = 1/(a_n^{(v)} \Delta y^2),$$

$$A_B = 1/(a_b^{(w)} \Delta z^2), \quad A_T = 1/(a_t^{(w)} \Delta z^2),$$

$$A_P^{(p)} = A_W + A_E + A_S + A_N + A_B + A_T,$$

$$D_P = \frac{(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e}{\Delta x} + \frac{(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n}{\Delta y} + \frac{(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t}{\Delta z}.$$

Как можно заметить, в знаменатели формул, предназначенных для вычисления функции давления, входят коэффициенты  $a_w^{(u)}$ ,  $a_e^{(u)}$ ,  $a_s^{(v)}$ ,  $a_n^{(v)}$ ,  $a_b^{(w)}$ ,  $a_t^{(w)}$  дискретных уравнений (2.13), (2.15) и (2.16) для компонент массовой скорости. Они определены в центральных узлах шести контрольных объемах, смещенных на полшага относительно контрольного объема для функции давления (см. рис. 2.5). Верхние индексы в обозначениях этих коэффициентов указывают вычисляемую компоненту скорости и, следовательно, назначенный ей контрольный объем.

Коэффициент  $A_P^{(p)}$  при вычисляемой функции давления  $\tilde{p}_P$  также снабжен верхним индексом, чтобы отметить равенство его сумме коэффициентов  $A_W$ ,  $A_E$ ,  $A_S$ ,  $A_N$ ,  $A_B$ ,  $A_T$ , определенных на гранях контрольного объема для функции давления.

Если бы компоненты массовой скорости удовлетворяли уравнению неразрывности, то численное решение дискретного уравнения (2.18) при соответствующих граничных условиях давало бы однозначное распределение функции давления в расчетной области. Однако в ходе итераций значения скорости обычно не вполне соответствуют уравнению неразрывности, поэтому в контрольном объеме для функции давления появляется ненулевой расчетный источник массы, и поле давления, рассчитанное по уравнению (2.18), оказывается неверным.

Чтобы значения скорости лучше удовлетворяли уравнению неразрывности, вводят поправку давления  $p'$  [3]. Ее рассчитывают по приближенному дискретному уравнению, аналогичному (2.18), с теми же коэффициентами, но при новом свободном члене  $D'_P$  уравнения, который теперь содержит компоненты вектора массовой скорости, а не псевдоскорости:

$$A_P p'_P \approx A_W p'_W + A_E p'_E + A_S p'_S + A_N p'_N + A_B p'_B + A_T p'_T + D'_P, \quad (2.19)$$

$$D'_P = \frac{(\rho u)_w - (\rho u)_e}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_s - (\rho v)_n}{\Delta y} + \frac{(\rho w)_b - (\rho w)_t}{\Delta z}.$$

Свободный член  $D'_P$  этого уравнения равен левой части дискретного уравнения неразрывности (2.17), взятой с отрицательным знаком в контрольном объеме для функции давления, то есть, по существу, равен расчетному источнику массы, взятому с обратным знаком.

Основное назначение поправки давления  $p'$  состоит в том, чтобы, корректируя поле скорости, постепенно уменьшать расчетный дисбаланс массы по всем контрольным объемам области моделирования. В результате достигается сходимость итераций при решении дискретных аналогов дифференциальных уравнений движения. Если абсолютная величина поправки давления постепенно приближается к нулю, то погрешность ее вычисления по приближенному уравнению (2.19) практически не сказывается на точности численного решения задачи [3].

Система дискретных уравнений движения несжимаемой жидкости обычно решается с помощью итерационных алгоритмов, например методом SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised) [3]. Для достижения сходимости итераций при вычислении поправки давления применяют сильную нижнюю релаксацию в дискретном уравнении (2.19) и создают дополнительный "внутренний" итерационный цикл его численного решения.

### **§ 8. Граничные условия к уравнениям движения**

Постановка граничных условий должна обеспечивать однозначность решения системы эллиптических дифференциальных уравнений. Обычно во входном сечении задается величина скорости или давления. Если задана скорость, то для функции давления применяются граничные условия второго рода с произвольной, равной нулю. И, наоборот, если задана функция давления, то скорость на границе рассчитывается по условиям второго рода.

Выходное расчетное сечение выбирается там, где скорость потока газов достаточно велика и направлена к выходу из расчетной области. В этом случае функция от числа Пекле (1.18) в дискретном уравнении для рассматриваемой компоненты скорости сводит к нулю коэффициент перед ее неизвестным значением за выходной границей, что равносильно заданию граничных условий второго рода с нулевой производной. При такой постановке граничных условий не учитывается воздействие внешней среды за выходным сечением на процессы в расчетной области.

В дискретные уравнения движения (2.13), (2.15) и (2.16) давление входит лишь в виде разности своих значений. Поэтому нет необходимости задавать в граничных условиях абсолютное давление. Гораздо удобнее отсчитывать расчетное давление от произвольно принятого уровня, например, приравнивая к нулю функцию давления на выходе из расчетной области.

Достаточно сложный расчет давления на поверхности стен предлагается исключить из вычислительного алгоритма [3], применив такую систему построения сетки, при которой одна из граней каждого пристенного контрольного объема для функции давления находится на поверхности стенки. В качестве примера на рис. 2.6 изображен контрольный объем для функции давления, нижняя грань которого совмещена с поверхностью стенки, размещенной вдоль оси  $x$ .

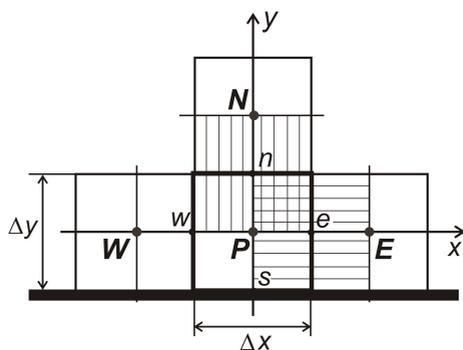


Рис. 2.6. Контрольные объемы, прилегающие к поверхности стенки

Следует учесть, что на стенах, ограждающих расчетную область, обычно выполняются условия "прилипания", согласно которым скорость жидкости или газа на обтекаемой поверхности равна скорости движения этой поверхности или равна нулю, если стена неподвижна. Это значит, что в точке  $s$  на рис. 2.6 задана скорость  $v_s$ , величина которой не зависит от разности давления в соседних точках, и, следовательно, на поверхности стенки псевдоскорость равна компоненте массовой скорости:

$$(\rho \hat{v})_s = (\rho v)_s.$$

В результате функция давления  $\tilde{p}_s$  на границе не войдет в расчетное дискретное уравнение (2.18).

Так как значения массовой скорости на поверхности стен известны, то при численном моделировании движения могут быть поставлены простейшие граничные условия первого рода. При этом в дискретные уравнения для узлов сетки, ближайших к стенке, войдут односторонние производные на ее поверхности от компонент продольной скорости. Например, в контрольных объемах, прилегающих к стенке и смещенных вдоль оси  $x$  (см. рис. 2.6), дискретное уравнение (2.13) примет следующий вид, если сохранить неизменными индексы при его коэффициентах:

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T + \\ -(\tilde{p}_e - \tilde{p}_w)/\Delta x + d_P^{(u)} - \frac{v_s}{\Delta y} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_s.$$

При ламинарном движении односторонняя производная на стенке от массовой скорости может быть найдена приближенно:

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_s \approx 2 \frac{(\rho u)_P - (\rho u)_s}{\Delta y},$$

где  $(\rho u)_P$  – массовая скорость в узле  $P$  сетки рядом с поверхностью стенки;  $u_s$  – скорость движущейся стенки;  $\Delta y$  – шаг сетки.

В таком случае дискретное уравнение может быть вновь приведено к форме (2.13), но с измененным коэффициентом  $a_S$ :

$$a_S = 2 v_s / \Delta y^2.$$

Способ вычисления производной на поверхности стенки при турбулентном движении среды рассмотрен в следующей главе.

Если на обтекаемой поверхности наблюдается эффект "прилипания", то рядом с ней образуется динамический пограничный слой, в котором продольная скорость  $u$  относительно быстро изменяется по нормали к поверхности, приближаясь к значению  $u_\infty$  в невозмущенном потоке, как показано на рис. 2.7. Понятие пограничного слоя позволяет более наглядно осуществить постановку граничных условий.

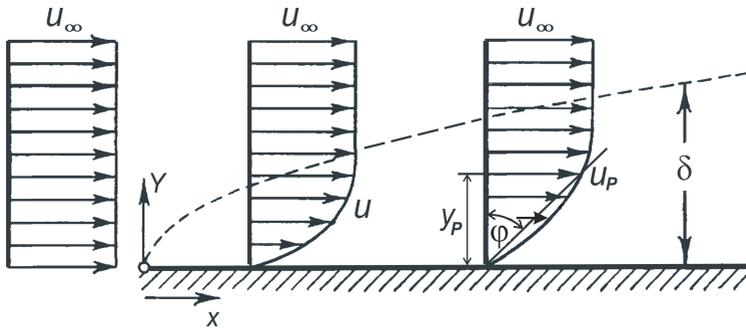


Рис. 2.7. Схема образования пограничного слоя на плоской пластине:  
 $u, u_\infty$  – скорость в пограничном слое и вдали за его пределами;  
 $\varphi$  – угол наклона хорды;  $\delta$  – толщина пограничного слоя

Полагая, что в уравнениях Навье–Стокса, примененных к пристенному слою жидкости, малые слагаемые можно отбросить, получают более простые дифференциальные уравнения пограничного слоя. При этом уравнение для поперечной компоненты скорости  $v$  сводится к приближенному равенству:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0.$$

Оно означает, что давление остается практически постоянным поперек пограничного слоя, что не противоречит граничным условиям к уравнению для функции давления, принятым ранее.

На графике распределения продольной скорости в пограничном слое (см. рис. 2.7) проведена хорда через точки, соответствующие значениям скорости на стенке и в ближайшем к ней узле сетки. При измельчении поперечного шага сетки угол  $\varphi$  между этой хордой и осью  $y$ , направленной по нормали к стенке, приближается к углу наклона касательной к кривой изменения скорости, тангенс которого, как известно, равен величине односторонней производной от скорости на поверхности стенки. В результате на более мелкой сетке достигается меньшая погрешность постановки граничных условий для продольной компоненты скорости.

Для поправки давления  $p'$ , вычисляемой по уравнению (2.19), рекомендуются такие же граничные условия, как и для функции давления [3], не задающие значения искомой функции на поверхности стенки. По-видимому, возможны и другие более жесткие граничные условия, учитывая, что при малой величине поправки давления, стремящейся к нулю в ходе итераций, погрешность ее вычисления практически не сказывается на результатах численного моделирования.

Например, при постановке граничных условий в контрольном объеме, выделенном на рис. 2.6, вполне допустимо приравнять к нулю поправку давления  $p'_s$  на поверхности стенки, одновременно связав ее коэффициентами переноса с поправкой давления  $p'_p$  в ближайшем к стенке узле сетки. Для этого следует найти значение коэффициента  $A_S$  уравнения (2.19) с помощью коэффициента  $a_s^{(v)}$  дискретного уравнения для поперечной скорости  $v_s$ . Хотя коэффициенты уравнения (2.15) в центральном узле контрольного объема для компоненты скорости вычисляются как сумма коэффициентов переноса, определенных на гранях того же объема, в данном случае только одно слагаемое этой суммы отличается от нуля. В итоге приходим к следующей оценке искомых значений расчетных коэффициентов:

$$a_s^{(v)} \approx v_p / \Delta y^2, \quad A_S \approx 1 / v_p.$$

### § 9. Упрощенный алгоритм решения системы уравнений

Если граничные условия, в соответствии с [3], не задают значений поправки давления на поверхности стен, то они практически не влияют и на ее величину во внутренних узлах сетки. Как следует из системного анализа, в том случае, когда влияние поправки давления  $p'$  на границе не передается внутрь расчетной области, связи между ее значениями во внутренних узлах сетки, определяемые лишь приближенными уравнениями, оказываются несущественными и могут не учитываться.

При таком упрощении в правой части уравнения для поправки давления (2.19) останется только свободный член  $D'_P$ , а сама поправка давления станет равной расчетному источнику массы, взятому с противоположным знаком и поделенному на коэффициент  $A_P^{(p)}$  [11]:

$$p'_P \approx -\frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{A_P^{(p)} \Delta x} - \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{A_P^{(p)} \Delta y} - \frac{(\rho w)_t - (\rho w)_b}{A_P^{(p)} \Delta z} \equiv D'_P / A_P^{(p)}.$$

Представление поправки давления в упрощенном виде позволяет ввести ее выражение непосредственно в дискретные аналоги дифференциальных уравнений Навье–Стокса, в частности, в дискретное уравнение (2.13) для продольной компоненты массовой скорости в смещенном контрольном объеме, изображенном на рис. 2.8:

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_S(\rho u)_S + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T +$$

$$-\frac{\tilde{p}_e - \tilde{p}_w}{\Delta x} + d_P^{(u)} - \frac{D'_e / A_e^{(p)} - D'_w / A_w^{(p)}}{\Delta x}. \quad (2.20)$$

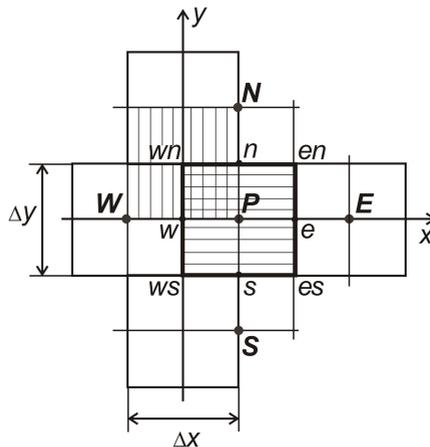


Рис. 2.8. Обозначение узлов сетки при расчете скорости  $(\rho u)_P$  в смещенном контрольном объеме (точки по оси z не показаны)

Рассмотрим более внимательно структуру источников массы в последнем уравнении для компоненты массовой скорости. Применяя разнесенную сетку, следует иметь в виду, что переход к вычислению каждой компоненты скорости в соответствующем ей контрольном объеме сопровождается смещением всех обозначений узлов сетки, как показано на рис. 2.8. Если продольная массовая скорость  $(\rho u)_P$  в центральном узле  $P$  контрольного объема вычисляется по уравнению (2.20), то функция давления и поправка давления в этом уравнении определяются в узлах  $w$  и  $e$  на гранях того же контрольного объема. В таком случае свободный член дискретного уравнения (2.19) для поправки давления в контрольных объемах с центральными узлами  $w$  и  $e$  имеет следующий вид:

$$D'_w = [(\rho u)_w - (\rho u)_P] / \Delta x + [(\rho v)_{ws} - (\rho v)_{wn}] / \Delta y + [(\rho w)_{wb} - (\rho w)_{wt}] / \Delta z,$$

$$D'_e = [(\rho u)_P - (\rho u)_E] / \Delta x + [(\rho v)_{es} - (\rho v)_{en}] / \Delta y + [(\rho w)_{eb} - (\rho w)_{et}] / \Delta z.$$

Заменим этими развернутыми выражениями величины  $D'_w$  и  $D'_e$  в слагаемых уравнения (2.20), служащего для вычисления продольной компоненты массовой скорости:

$$D'_w / A_w^{(p)} - D'_e / A_e^{(p)} = \frac{(\rho u)_E - (\rho u)_P}{A_e^{(p)} \Delta x} - \frac{(\rho u)_P - (\rho u)_w}{A_w^{(p)} \Delta x} + \frac{(\rho v)_{en} - (\rho v)_{es}}{A_e^{(p)} \Delta y} - \frac{(\rho v)_{wn} - (\rho v)_{ws}}{A_w^{(p)} \Delta y} + \frac{(\rho w)_{et} - (\rho w)_{eb}}{A_e^{(p)} \Delta z} - \frac{(\rho w)_{wt} - (\rho w)_{wb}}{A_w^{(p)} \Delta z}.$$

Характерно, что в правую часть полученного равенства, а, следовательно, и в правую часть уравнения (2.20), среди прочих входят слагаемые с отрицательным знаком перед ними, содержащие искомое значение скорости  $(\rho u)_P$ . То, что при этом нарушается правило построения дискретных аналогов (1.16), придает расчетным уравнениям свойство условной устойчивости, не гарантирующей в общем случае сходимости итераций. Чтобы устранить столь существенный недостаток, нужно все члены,

содержащие искомые компоненты скорости  $(\rho u)_P$ , перенести в левую часть дискретного уравнения (2.20). Тогда разностная схема станет полностью неявной и приобретет свойство безусловной устойчивости.

Тот же результат можно получить более простым способом. Следует в обе части уравнения (2.20) добавить слагаемые, содержащие искомую компоненту скорости, чтобы нейтрализовать такие же слагаемые, входящие с отрицательным знаком в их правую часть. Выполнив указанные математические преобразования для всех трех компонент массовой скорости, получим дискретные уравнения упрощенного алгоритма,

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_S(\rho u)_S + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T - \frac{\tilde{p}_e - \tilde{p}_w}{\Delta x} - \frac{D'_e/A_e^{(p)} - D'_w/A_e^{(p)}}{\Delta x} + d_P^{(u)}, \quad (2.21)$$

$$a_P^{(v)}(\rho v)_P = a_W(\rho v)_W + a_E(\rho v)_E + a_S(\rho v)_S + a_N(\rho v)_N + a_B(\rho v)_B + a_T(\rho v)_T - \frac{\tilde{p}_n - \tilde{p}_s}{\Delta y} - \frac{D'_n/A_n^{(p)} - D'_s/A_s^{(p)}}{\Delta y} + d_P^{(v)}, \quad (2.22)$$

$$a_P^{(w)}(\rho w)_P = a_W(\rho w)_W + a_E(\rho w)_E + a_S(\rho w)_S + a_N(\rho w)_N + a_B(\rho w)_B + a_T(\rho w)_T - \frac{\tilde{p}_t - \tilde{p}_b}{\Delta z} - \frac{D'_t/A_t^{(p)} - D'_b/A_b^{(p)}}{\Delta z} + d_P^{(w)}. \quad (2.23)$$

Коэффициенты в левой части расчетных уравнений определяются следующими формулами:

$$a_P^{(u)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left(1/A_w^{(p)} + 1/A_e^{(p)}\right)/\Delta x^2,$$

$$a_P^{(v)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left(1/A_s^{(p)} + 1/A_n^{(p)}\right)/\Delta y^2,$$

$$a_P^{(w)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left(1/A_b^{(p)} + 1/A_t^{(p)}\right)/\Delta z^2,$$

и свободные члены уравнений имеют вид,

$$d_P^{(u)} = \frac{\rho_e - \rho_w}{\Delta x} gh_P + \left( \frac{1}{A_w^{(\rho)}} + \frac{1}{A_e^{(\rho)}} \right) \frac{(\rho u)_P}{\Delta x^2} + \Delta u_P ,$$

$$d_P^{(v)} = \frac{\rho_n - \rho_s}{\Delta y} gh_P + \left( \frac{1}{A_s^{(\rho)}} + \frac{1}{A_n^{(\rho)}} \right) \frac{(\rho v)_P}{\Delta y^2} + \Delta v_P ,$$

$$d_P^{(w)} = \frac{\rho_t - \rho_b}{\Delta z} gh_P + \left( \frac{1}{A_b^{(\rho)}} + \frac{1}{A_t^{(\rho)}} \right) \frac{(\rho w)_P}{\Delta z^2} + \Delta w_P .$$

Коэффициенты  $a_w$ ,  $a_e$ ,  $a_s$ ,  $a_n$ ,  $a_b$ ,  $a_t$  вычисляются по формулам дискретного уравнения (2.13).

Появление источников массы в дискретных уравнениях для компонент скорости имеет определенный физический смысл: разность источников массы способствует расчетному "перетеканию" жидкости в те контрольные объемы, где источник массы меньше. В результате сумма абсолютных значений источников массы в расчетной области уменьшается в процессе итераций, а распределение скорости лучше удовлетворяет дифференциальному уравнению неразрывности (2.17).

В обе части дискретных уравнений (2.21) – (2.23) входят группы формально одинаковых слагаемых, создающие нижнюю релаксацию вычисляемой компоненты скорости. Эту релаксацию можно рассматривать как локально определенную, поскольку в каждом расчетном узле сетки ее величина соответствует локальному условию поддержания сходимости итераций.

Дискретное уравнение (2.18) для функции давления может применяться без изменений. Численное решение этого уравнения желательно выполнять без применения релаксации, чтобы поле давления полностью соответствовало пространственному распределению скорости жидкой или газообразной среды.

Таким образом, в упрощенном алгоритме, предназначенном для математического моделирования трехмерного движения несжимаемой жидкости, применяются три дискретных урав-

нения (2.21) – (2.23), определяющие вектор массовой скорости, и одно дискретное уравнение (2.18) для функции давления. Использование при вычислении компонент скорости расчетных источников массы и локально определенной релаксации позволило исключить из математической модели дискретное уравнение для поправки давления.

Локально определенную релаксацию целесообразно вводить в уравнения для компонент скорости также и в тех случаях, когда поправка давления вычисляется по дискретному уравнению (2.19) при более жестких граничных условиях, рассмотренных в предыдущем параграфе. Тогда расчетные дискретные уравнения для компонент массовой скорости приводятся к следующему обобщенному виду:

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_S(\rho u)_S + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T - (\tilde{p}_e - \tilde{p}_w + p'_e - p'_w)/\Delta x + d_P^{(u)}, \quad (2.24)$$

$$a_P^{(v)}(\rho v)_P = a_W(\rho v)_W + a_E(\rho v)_E + a_S(\rho v)_S + a_N(\rho v)_N + a_B(\rho v)_B + a_T(\rho v)_T - (\tilde{p}_n - \tilde{p}_s + p'_n - p'_s)/\Delta y + d_P^{(v)}, \quad (2.25)$$

$$a_P^{(w)}(\rho w)_P = a_W(\rho w)_W + a_E(\rho w)_E + a_S(\rho w)_S + a_N(\rho w)_N + a_B(\rho w)_B + a_T(\rho w)_T - (\tilde{p}_t - \tilde{p}_b + p'_t - p'_b)/\Delta z + d_P^{(w)}. \quad (2.26)$$

Коэффициенты и свободные члены этих уравнений определяются так же, как и в уравнениях (2.21) – (2.23) упрощенного алгоритма. При вычислении поправки давления по дискретному уравнению (2.19) теперь не требуется ни применения релаксации, ни организации внутреннего цикла итераций.

Абсолютная величина расчетных источников массы, просуммированная по всем контрольным объемам, служит естественным и наиболее представительным показателем сходимости итераций при численном моделировании движения жидкой или газообразной среды.

## § 10. Уравнения в цилиндрических координатах

При дифференцировании вектора скорости в цилиндрической системе координат необходимо рассматривать его как произведение двух функций, учитывая, что направление единичных векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  изменяется по криволинейной координате  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{r \partial \varphi} = \left( \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \mathbf{k} \right) + \left( u \frac{\partial \mathbf{i}}{r \partial \varphi} + v \frac{\partial \mathbf{j}}{r \partial \varphi} + w \frac{\partial \mathbf{k}}{r \partial \varphi} \right).$$

Дифференцирование единичных векторов по правилам тензорного исчисления приводит к появлению дополнительных слагаемых в уравнениях для компонент скорости, направленных по осям  $r$  и  $\varphi$  [12].

В итоге дифференциальные уравнения переноса для компонент массовой скорости приобретают следующий вид, учитывающий криволинейность цилиндрической системы координат:

- для массовой скорости  $(\rho u)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial r v(\rho u)}{r \partial r} + \frac{\partial w(\rho u)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( v \frac{\partial(\rho u)}{r \partial \varphi} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} g h + \delta u, \end{aligned}$$

- для массовой скорости  $(\rho v)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial r v(\rho v)}{r \partial r} + \frac{\partial w(\rho v)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( v \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \varphi} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial r} g h - v \frac{(\rho v)}{r^2} + \rho \frac{w^2}{r} - 2 \frac{\rho v}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \delta v, \end{aligned}$$

- для массовой скорости  $(\rho w)$ ,

$$\frac{\partial u(\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial r v(\rho w)}{r \partial r} + \frac{\partial w(\rho w)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r v \frac{\partial(\rho w)}{\partial r} \right) -$$

$$-\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(v\frac{\partial(\rho w)}{r\partial\varphi}\right)=-\frac{\partial\tilde{p}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial\rho}{r\partial\varphi}gh-v\frac{(\rho w)}{r^2}-\frac{\rho vw}{r}+2\frac{\rho v}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\delta w.$$

При построении математической модели в цилиндрических координатах дифференциальные уравнения переноса количества движения преобразуются к дискретному виду подобно уравнениям (2.24) – (2.26). Допускается введение в них поправки давления и применение локально определенной релаксации:

$$a_P^{(u)}(\rho u)_P = a_W(\rho u)_W + a_E(\rho u)_E + a_S(\rho u)_S + a_N(\rho u)_N + a_B(\rho u)_B + a_T(\rho u)_T - (\tilde{p}_e - \tilde{p}_w + p'_e - p'_w)/\Delta x + d_P^{(u)},$$

$$a_P^{(v)}(\rho v)_P = a_W(\rho v)_W + a_E(\rho v)_E + a_S(\rho v)_S + a_N(\rho v)_N + a_B(\rho v)_B + a_T(\rho v)_T - (\tilde{p}_n - \tilde{p}_s + p'_n - p'_s)/\Delta r + d_P^{(v)},$$

$$a_P^{(w)}(\rho w)_P = a_W(\rho w)_W + a_E(\rho w)_E + a_S(\rho w)_S + a_N(\rho w)_N + a_B(\rho w)_B + a_T(\rho w)_T - (\tilde{p}_t - \tilde{p}_b + p'_t - p'_b)/r_P\Delta\varphi + d_P^{(w)}.$$

Коэффициенты  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$ ,  $a_B$ ,  $a_T$  в узлах сетки, соседних с расчетным узлом  $P$ , определяются аналогично таким же коэффициентам дискретных уравнений (2.24) – (2.26), но с учетом особенностей их записи в цилиндрических координатах:

$$a_W = \frac{v_w}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_w) + \frac{\max(u_w, 0)}{\Delta x}, \quad a_E = \frac{v_e}{\Delta x^2} f(\text{Pe}_e) + \frac{\max(-u_e, 0)}{\Delta x},$$

$$a_S = \frac{r_s}{r_P} \left( \frac{v_s}{\Delta r^2} f(\text{Pe}_s) + \frac{\max(v_s, 0)}{\Delta r} \right), \quad a_N = \frac{r_n}{r_P} \left( \frac{v_n}{\Delta r^2} f(\text{Pe}_n) + \frac{\max(-v_n, 0)}{\Delta r} \right),$$

$$a_B = \frac{v_b}{r_P^2\Delta\varphi^2} f(\text{Pe}_b) + \frac{\max(w_b, 0)}{r_P\Delta\varphi}, \quad a_T = \frac{v_t}{r_P^2\Delta\varphi^2} f(\text{Pe}_t) + \frac{\max(-w_t, 0)}{r_P\Delta\varphi}.$$

Учитывая, что расчетные узлы сетки  $P$  в уравнениях для разных компонент скорости смещены на полшага вдоль осей

координат и не совпадают друг с другом, коэффициентам в левой части дискретных уравнений придан верхний индекс, указывающий на принадлежность контрольного объема той или иной компоненте скорости:

$$a_p^{(u)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left( \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{r_n v_n - r_s v_s}{r_p \Delta r} + \frac{w_t - w_b}{r_p \Delta \varphi} \right) + \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_e} \right) \frac{1}{\Delta x^2},$$

$$a_p^{(v)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left( \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{r_n v_n - r_s v_s}{r_p \Delta r} + \frac{w_t - w_b}{r_p \Delta \varphi} \right) + \frac{v_p}{r_p^2} + \left( \frac{r_p}{A_s r_s} + \frac{r_p}{A_n r_n} \right) \frac{1}{\Delta r^2},$$

$$a_p^{(w)} = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \left( \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{r_n v_n - r_s v_s}{r_p \Delta r} + \frac{w_t - w_b}{r_p \Delta \varphi} \right) + \frac{v_p}{r_p^2} + \left( \frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_t} \right) \frac{1}{r_p^2 \Delta \varphi^2}.$$

Свободные члены дискретных уравнений переноса количества движения имеют в цилиндрических координатах следующий вид:

$$d_P^{(u)} = \frac{\rho_e - \rho_w}{\Delta x} g h_P + \left( \frac{1}{A_w} + \frac{1}{A_e} \right) \frac{(\rho u)_P}{\Delta x^2} + \Delta u,$$

$$d_P^{(v)} = \frac{\rho_n - \rho_s}{\Delta r} g h_P + \frac{\rho_P}{r_P} w_P^2 - 2\mu_P \frac{w_t - w_b}{r_P^2 \Delta \varphi} + \left( \frac{r_p}{A_s r_s} + \frac{r_p}{A_n r_n} \right) \frac{(\rho v)_P}{\Delta r^2} + \Delta v,$$

$$d_P^{(w)} = \frac{\rho_t - \rho_b}{r_P \Delta \varphi} g h_P - \frac{v_P}{r_P} (\rho w)_P + 2\mu_P \frac{v_t - v_b}{r_P^2 \Delta \varphi} + \left( \frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_t} \right) \frac{(\rho w)_P}{r_P^2 \Delta \varphi^2} + \Delta w.$$

Применение функции давления  $\tilde{p}$  при решении задачи в цилиндрических координатах имеет преимущество, так как позволяет ограничиться более простым вычислением вертикальной координаты  $h_P$  вместо того, чтобы искать выражения для проекций силы тяжести на криволинейные оси координат.

Дискретное уравнение для функции давления в цилиндрических координатах имеет такой же вид, как и уравнение (2.18):

$$A_P^{(p)} \tilde{p} = A_W \tilde{p}_W + A_E \tilde{p}_E + A_S \tilde{p}_S + A_N \tilde{p}_N + A_B \tilde{p}_B + A_T \tilde{p}_T + D_P.$$

Криволинейность координат учитывается здесь математической формулировкой коэффициентов и свободного члена дискретного уравнения. Коэффициенты в правой части уравнения определяются формулами, индексы в которых соответствуют контрольному объему для давления, а свободный член уравнения  $D_P$  по-прежнему вычисляется по значениям компонент псевдоскорости:

$$\begin{aligned} A_W &= 1/(a_w^{(u)} \Delta x^2), & A_E &= 1/(a_e^{(u)} \Delta x^2), \\ A_S &= r_s / (a_s^{(v)} r_P \Delta r^2), & A_N &= r_n / (a_n^{(v)} r_P \Delta r^2), \\ A_B &= 1/(a_b^{(w)} r_P^2 \Delta \varphi^2), & A_T &= 1/(a_t^{(w)} r_P^2 \Delta \varphi^2), \end{aligned}$$

$$A_P = A_W + A_E + A_S + A_N + A_B + A_T,$$

$$D_P = \frac{(\rho \hat{u})_W - (\rho \hat{u})_E}{\Delta x} + \frac{r_s (\rho \hat{v})_s - r_n (\rho \hat{v})_n}{r_P \Delta r} + \frac{(\rho \hat{w})_b - (\rho \hat{w})_t}{r_P \Delta \varphi}.$$

Чтобы завершить построение математической модели движения жидкости и газа с уравнениями в цилиндрической системе координат, потребуется небольшая корректировка выражений для диффузионных поправок  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  в дифференциальных уравнениях для компонент массовой скорости, которую при необходимости каждый сможет выполнить самостоятельно.

### Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

#### § 1. Статистические характеристики турбулентности

Турбулентное движение, в отличие от ламинарного, характеризуется беспорядочными пульсациями скорости, которые происходят в каждой точке потока с большой частотой, достигающей нескольких сотен пульсаций в секунду (рис. 3.1). Вследствие неразрывности потока, любое случайное смещение какой-либо части жидкости приводит к притоку на ее место соседних жидких объемов. Так возникают турбулентные вихри разных размеров. Самые крупные вихри имеют масштаб, соизмеримый с поперечным размером канала. Размер самых мелких вихрей ограничен силами внутреннего трения, препятствующими их вращению.

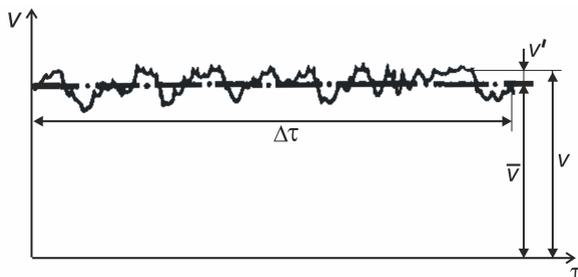


Рис. 3.1. Пульсации скорости жидкости в турбулентном потоке:  
 $v$  – мгновенная скорость;  $\bar{v}$  – осредненная скорость;  
 $v'$  – пульсация скорости;  $\tau$  – время

Естественно, что при изучении турбулентности используют статистические методы, согласно которым мгновенную скорость  $v$  представляют как алгебраическую сумму осредненной скорости  $\bar{v}$  и отклонения от нее в виде пульсации скорости  $v'$ :

$$v = \bar{v} + v'.$$

Осредненную скорость обычно определяют по совокупности случайных значений мгновенной скорости, имевшей место за сравнительно короткий интервал времени  $\Delta\tau$ :

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \mathbf{v} d\tau.$$

Так как пульсации происходят с равной вероятностью во взаимно противоположных направлениях, то их статистическое осреднение дает нуль (угловые скобки служат здесь символом осреднения):

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \mathbf{v}' d\tau = 0.$$

Также и осреднение произведения пульсации  $\mathbf{v}'$  на постоянный множитель, например на осредненную скорость  $\bar{\mathbf{v}}$ , приводит результат к нулю, так как постоянную величину можно вынести за знак осредняющего интеграла:

$$\langle \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}' \rangle = \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\Delta\tau} \int_0^{\Delta\tau} \mathbf{v}' d\tau = 0.$$

В то же время следует иметь в виду, что осредненное значение двух взаимозависимых пульсаций скорости  $\langle v'_i v'_j \rangle$ , называемое их корреляцией, отличается от нуля (здесь индексы  $i, j$  могут принимать значения 1, 2 или 3 в соответствии с нумерацией трех координатных осей). Осредненные значения квадрата пульсации скорости  $\langle v_i'^2 \rangle$  в направлении каждой из координатных осей позволяют определить степень турбулентности потока,

$$Tu \equiv \sqrt{\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle} / |\bar{\mathbf{v}}|,$$

и кинетическую энергию турбулентности, приходящуюся на единицу массы жидкости,

$$k_T \equiv \left( \langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle \right) / 2.$$

Источником кинетической энергии турбулентных вихрей служит энергия осредненного движения жидкости. Крупные турбулентные вихри забирают часть механической энергии потока и передают ее образующимся в них средним вихрям. Те отдают

часть своей кинетической энергии возникающим в них более мелким вихрям. Таким образом, создается каскадная передача кинетической энергии к турбулентным образованиям наименьшего масштаба. Самые мелкие турбулентные вихри интенсивно уничтожаются силами внутреннего трения, возрастающими пропорционально градиенту мгновенной скорости при уменьшении размера вращающихся жидких частиц. В результате кинетическая энергия турбулентности переходит в тепловую энергию и рассеивается в окружающей среде. Процессы, вызывающие появление кинетической энергии турбулентности, называют ее генерацией, а процессы рассеяния энергии турбулентности вследствие перехода в тепловую энергию – ее диссипацией.

Кинетическая энергия турбулентности сосредоточена в основном в турбулентных образованиях промежуточных размеров. В них диссипация рассеивает лишь небольшую часть турбулентной энергии. Средний размер энергосодержащих турбулентных вихрей примерно равен масштабу турбулентности, который является одной из основных статистических характеристик турбулентного движения.

## § 2. Турбулентные напряжения сил внутреннего трения

Чтобы наглядно показать влияние турбулентных пульсаций на течение жидкости, воспользуемся дифференциальным уравнением Навье–Стокса (2.4), записав его в приближении пограничного слоя,

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

и заменив в нем компоненты мгновенной скорости соответствующей суммой осредненной и пульсационной скорости:

$$\frac{\partial \rho(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial \rho(\bar{v} + v')(\bar{u} + u')}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

После раскрытия скобок и осреднения величин получают одно из дифференциальных уравнений Рейнольдса в приближении пограничного слоя (пульсации давления здесь не рассматриваются):

$$\left( \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \langle \rho u' u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho u' v' \rangle}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.1)$$

В уравнение Рейнольдса (3.1) входят такие же слагаемые (они взяты в скобки), как и в исходное уравнение пограничного слоя, отличающиеся только тем, что функцией в них служит не мгновенная, а осредненная скорость. Более существенное отличие этого уравнения заключается в появлении в его левой части двух новых слагаемых, в виде производных от корреляций компонент пульсационной скорости.

Сопоставляя уравнения Рейнольдса с дифференциальными уравнениями сохранения количества движения, приходят к выводу, что корреляции пульсаций скорости, умноженные на плотность  $\rho$ , образуют тензор турбулентных напряжений, которые часто называют рейнольдсовыми:

$$\sigma_{xx}^T = -\rho \langle u' u' \rangle, \quad \sigma_{xy}^T = -\rho \langle u' v' \rangle.$$

В тензорных обозначениях рейнольдсовы напряжения могут быть представлены единой формулой:

$$\sigma_{ij}^T = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle.$$

Таким образом, в уравнения Рейнольдса входят дополнительные слагаемые, которые учитывают напряжения внутреннего трения, возникающие при переносе количества движения хаотичными турбулентными пульсациями. В результате этого число неизвестных переменных оказывается больше числа имеющихся уравнений, так что система дифференциальных уравнений переноса количества движения теперь становится незамкнутой. Ее замыкание как раз и является задачей разрабатываемых моделей турбулентности.

В инженерной практике принято считать, что в соответствии с гипотезой Буссинеска турбулентные напряжения пропорциональны производным от осредненных компонент скорости [13] по аналогии с линейными соотношениями Стокса (2.3):

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_\tau \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_\tau \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

где  $\nu_\tau$  – коэффициент турбулентной вязкости (или, точнее, турбулентный аналог кинематического коэффициента вязкости);  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, равный единице при  $i=j$  и нулю в остальных случаях.

Применяя гипотезу Буссинеска, определяют шесть неизвестных компонент рейнольдсовых напряжений с помощью одной скалярной величины, – коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_\tau$  или  $\mu_\tau$ . Такой подход к проблеме может создавать расчетную погрешность в случае анизотропной турбулентности, когда величина коэффициента турбулентной вязкости зависит от направления напряжений силы внутреннего трения.

После подстановки выражений (3.2) в уравнения Рейнольдса получают дифференциальные уравнения турбулентного движения для компонент осредненной линейной скорости, аналогичные уравнениям Навье–Стокса (2.7) – (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} gh + \delta' u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{v}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} gh + \delta' v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{w}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k_T}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} gh + \delta' w, \end{aligned}$$

где  $\mu_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент вязкости, равный сумме динамического коэффициента вязкости  $\mu$  и его турбулентного аналога  $\mu_T$ .

Производные от кинетической энергии турбулентности в правой части этих уравнений обычно складываются с расчетной величиной давления, образуя так называемое модифицированное давление. Также и здесь, чтобы не усложнять уравнения переноса количества движения, условимся, что термин "функция давления" будет означать в дальнейшем ее модифицированную величину:

$$\tilde{p} \approx p + \rho gh + 2\rho k_T / 3.$$

Если отказаться от применения знаков осреднения как избыточных, то расчетные дифференциальные уравнения переноса количества движения в турбулентном потоке запишутся для компонент массовой скорости следующим образом:

- для массовой скорости  $(\rho u)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho u)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho u)}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} gh + \delta u, \end{aligned} \quad (3.3)$$

- для массовой скорости  $(\rho v)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho v)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_{\text{эф}} \frac{\partial (\rho v)}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} gh + \delta v, \end{aligned} \quad (3.4)$$

- для массовой скорости ( $\rho w$ ),

$$\frac{\partial u(\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho w)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{\text{эф}} \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{\text{эф}} \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{\text{эф}} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} gh + \delta w, \quad (3.5)$$

где  $v_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент вязкости, равный сумме кинематического коэффициента вязкости  $\nu$  и его турбулентного аналога  $\nu_t$ .

Уравнения (3.3) – (3.5) учитывают, что диффузионный перенос количества движения осуществляется в общем случае как хаотическим движением молекул, так и турбулентными пульсациями. В отличие от кинематического коэффициента вязкости  $\nu$  коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  не является физической константой. Установление его зависимости от осредненных параметров турбулентного движения среды является целью большинства математических моделей турбулентности, применяемых в настоящее время.

### § 3. Гипотезы пристенной турбулентности

Хотя возникновение и взаимодействие турбулентных пульсаций кажется на первый взгляд совершенно случайным процессом, тем не менее, он починается определенными закономерностями, которые изучаются теоретически и экспериментально. Прежде всего, рассмотрим закономерности турбулентного движения в пограничном слое.

Как показано на рис. 3.2, скорость турбулентного потока вблизи стенки изменяется столь быстро и нелинейно по сравнению с ламинарным течением, что для достижения необходимой точности результатов моделирования только численными методами потребовалась бы чрезмерно мелкая сетка. Формулировка граничных условий к дифференциальным уравнениям (3.3) –

(3.5) на основе закономерностей турбулентного пограничного слоя позволяет применять вблизи стенки более крупную сетку.

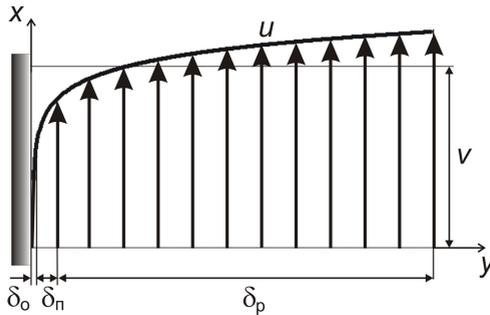


Рис. 3.2. Структура пристенной части турбулентного пограничного слоя:  
 $\delta_0$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_p$  – толщины вязкого, буферного и равновесного подслоев;  
 $u$  – продольная скорость жидкости;  $v$  – средняя скорость жидкости

Турбулентный пограничный слой, в отличие от ламинарного, имеет сложную структуру. Прежде всего, в нем выделяют пристенную область, занимающую около 15 % общей толщины пограничного слоя, и разделяют ее условно на три подслоя (см. рис. 3.2).

Непосредственно к обтекаемой поверхности, или стенке, прилегает тонкий вязкий подслой толщиной  $\delta_0$ , в котором молекулярная вязкость преобладает над турбулентной (т.е.  $\mu > \mu_t$ ). На некотором расстоянии от стенки образуется равновесный подслой толщиной  $\delta_p$ , в котором скорости генерации и диссипации энергии турбулентности примерно равны; здесь турбулентная вязкость в сотни раз превышает молекулярную [14]. Между вязким и равновесным подслоями находится переходный (буферный) подслой.

Несмотря на малую толщину, часто составляющую доли миллиметра, влияние вязкого подслоя на движение жидкости чрезвычайно велико. Почти ламинарное течение в нем постоянно нарушается отдельными турбулентными вихрями, поступаю-

щими в подслое извне. Более того, сам вязкий подслой является источником турбулентности. Жидкость у поверхности стенки движется неравномерно, ее отдельные элементы тормозятся, как бы прилипая к стенке, затем отрываются от нее и выносятся за пределы вязкого подслоя, создавая пульсации скорости. В результате кинетическая энергия турбулентных пульсаций рядом с вязким подслоем оказывается больше, чем в других частях пограничного слоя.

В то же время, в самом вязком подслое резко возрастает диссипация кинетической энергии турбулентности, вторичные турбулентные образования подавляются, и взаимодействие турбулентных вихрей ослабевает. Близость поверхности стенки, таким образом, приглушает развитие турбулентности в вязком подслое и частично рядом с ним – в буферном подслое.

В равновесном подслое вблизи гладкой стенки справедлива гипотеза Прандтля, согласно которой абсолютная величина турбулентных пульсаций компонент скорости в продольном ( $u'$ ) и поперечном ( $v'$ ) направлениях пропорциональна градиенту продольной скорости. Это позволяет найти выражение для турбулентного напряжения силы внутреннего трения вблизи стенки:

$$\sigma_{\tau} = -\rho\langle u'v' \rangle = \rho \left( l \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (3.6)$$

где  $l$  – длина пути смешения, которую принимают в качестве масштаба пристенной турбулентности.

Сопоставляя формулы (3.6) и (3.2), находят выражение для турбулентной вязкости по гипотезе Прандтля:

$$\mu_{\tau} = \rho l^2 |du/dy|. \quad (3.7)$$

Здесь использована абсолютная величина производной от скорости, так как коэффициент вязкости  $\mu_{\tau}$  должен быть положительным.

Обычно полагают, что касательное напряжение мало изменяется по толщине тонкого пристенного слоя жидкости и, следовательно, его можно считать приближенно равным напряжению  $\sigma_{\text{ст}}$  на обтекаемой стенке. Результирующее касательное напряжение находят как сумму турбулентного (3.6) и молекулярного (2.2) напряжений силы внутреннего трения, которые считаются здесь положительными независимо от направления скорости  $u$ :

$$\sigma_{\text{ст}} = \rho \left( l \frac{du}{dy} \right)^2 + \rho \nu \left| \frac{du}{dy} \right|.$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\rho$  – плотность, которая в изотермической среде должна быть постоянной.

Вместо касательного напряжения  $\sigma_{\text{ст}}$  более удобно применять в формулах физическую величину, которая называется динамической скоростью  $u_*$ , имеет размерность скорости и определяется по следующей формуле:

$$u_* \equiv \sqrt{\sigma_{\text{ст}} / \rho}.$$

Ее вводят в предыдущее равенство, которое записывают в виде безразмерного квадратного уравнения:

$$l_+^2 \left( \frac{du_+}{dy_+} \right)^2 + \left| \frac{du_+}{dy_+} \right| - 1 = 0, \quad (3.8)$$

где безразмерные переменные, обозначенные индексом "+", задаются следующими соотношениями размерных величин:

$$u_+ \equiv u / u_*, \quad y_+ \equiv y u_* / \nu, \quad l_+ \equiv l u_* / \nu.$$

Решением квадратного уравнения является выражение для производной от безразмерной скорости в пристенной области изотермического турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{du_+}{dy_+} = \frac{\sqrt{4l_+^2 + 1} - 1}{2l_+^2}, \quad (3.9)$$

которое, с учетом (3.7), приводит к формуле для турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости:

$$\frac{v_T}{\nu} = \frac{\sqrt{4l_+^2 + 1} - 1}{2}. \quad (3.10)$$

Следует обратить внимание на то, что, согласно (3.9), производная от безразмерной скорости равна единице в начале безразмерных координат, так что непосредственно у стенки справедливо приближенное равенство  $u_+ \approx y_+$ .

Безразмерные формулы (3.9) и (3.10) оказываются полезными при расчете турбулентности в пристенной области, если известны динамическая скорость  $u_*$  и безразмерная длина пути смешения  $l_+$ .

#### § 4. Турбулентное движение вблизи гладкой стенки

Исходя из анализа размерностей, Прандтль предположил, что длина пути смешения  $l$  пропорциональна расстоянию от обтекаемой поверхности,

$$l_+ = \kappa y_+, \quad (3.11)$$

где  $\kappa$  – коэффициент пропорциональности, считающийся универсальной постоянной,  $y$  – расстояние по нормали к стенке.

Подставляя линейную зависимость (3.11), справедливую в равновесном подслое, в выражение для безразмерной производной (3.9) и отбрасывая в нем единицы, как относительно малые слагаемые, получают приближенное дифференциальное уравнение,

$$du_+ \approx dy_+ / (\kappa y_+).$$

Интегрируя его, находят, что в равновесном подслое имеет место логарифмическое распределение скорости (см. рис. 3.2):

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + C, \quad (3.12)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, величина которой определяется по экспериментальным данным.

В вязком и переходном подслоях, где развитие турбулентных пульсаций подавляется близостью стенки, масштаб турбулентности заметно меньше предсказываемого формулой (3.11). Наиболее удачным считается сочетание линейного закона Прандтля с экспоненциальным множителем Ван Драйста [15]:

$$l_+ = \left(1 - e^{-y_+/A}\right) k y_+, \quad (3.13)$$

где  $A$  – конфигурационный фактор.

Из сопоставления с экспериментальными данными было найдено [16], что конфигурационный фактор  $A$  изменяется по координате  $y_+$  по квадратичному закону, который целесообразно представить в следующей форме:

$$A \approx 30 \left[1 - \left(y_+/y_{\log}^+\right)^2\right]. \quad (3.14)$$

Значение конфигурационного фактора  $A_{\text{ст}} = 30$  на поверхности гладкой стенки теоретически определено в [17], исходя из принципа максимальной устойчивости турбулентного движения. Постоянные  $k$  и  $y_{\log}^+$  находятся по экспериментальным данным. Как показано на рис. 3.3, при квадратичном изменении фактора  $A$  экспоненциальная зависимость (3.13) плавно сопрягается с линейным законом Прандтля (3.11) на безразмерном расстоянии от гладкой стенки  $y_+ = y_{\log}^+$ .

На рис. 3.4 представлены результаты измерений безразмерной скорости воздуха и трансформаторного масла вблизи гладкой поверхности пластины при больших числах Рейнольдса [18, 19]. Там же приведены более точные данные о распределении безразмерной продольной скорости воздуха в трубах [20], свидетельствующие о том, что параметры турбулентности в гладких трубах закономерно зависят от числа Рейнольдса при низких и умеренных его значениях.



Рис. 3.3. Изменение длины пути смещения вблизи гладкой стенки:  
 1 – линейное (3.11), 2 – экспоненциальное (3.13) при  $y_{\text{лог}}^+ = 50$

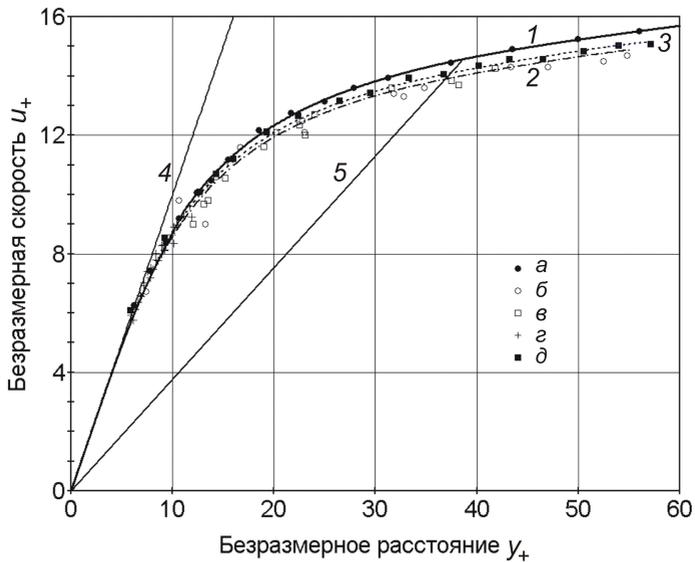


Рис. 3.4. Изменение безразмерной скорости: а, д – воздуха в трубах [20] при  $Re = 10000$  и  $Re = 24600$ ; б, е – воздуха [18, 19] и в – трансформаторного масла [18] вблизи пластины; 1, 2, 3 – расчет; 4 – касательная; 5 – хорда.

Из-за разброса экспериментальных значений величина универсальной постоянной в турбулентном пограничном слое точно не определена. Часто принимают  $\kappa = 0,41$  при обтекании пластины и  $\kappa = 0,4$  – в трубах. Обобщая результаты экспериментов, представленные на рис. 3.4, приходим к выводу, что, по видимому, степень развития турбулентности является основной причиной изменения величины универсальной постоянной независимо от того, где формируется пограничный слой – в трубах или на пластине.

Наличие уточненных выражений (3.13) и (3.14) для длины пути смешения дает возможность достаточно точно аппроксимировать правую часть дифференциального выражения (3.9) полиномиальной зависимостью и выполнить ее интегрирование. В результате таких математических операций получены полиномы восьмой степени при разных значениях постоянных  $\kappa$  и  $y_{\text{лог}}^+$ , удовлетворительно описывающие изменение безразмерной скорости  $u_+$  в вязком и буферном подслоях как при развитой турбулентности, так и при умеренных числах Рейнольдса [21]:

$$u_+ = c_0 + c_1 y_+ + c_2 y_+^2 + c_3 y_+^3 + c_4 y_+^4 + c_5 y_+^5 + c_6 y_+^6 + c_7 y_+^7 + c_8 y_+^8. \quad (3.15)$$

Коэффициенты полинома (3.15) приведены в табл. 1 и 2 для двух возможных значений универсальной постоянной  $\kappa$ .

По данным табл. 1 и 2 построены кривые 1 и 2 на рис. 3.4. Кривая 1, рассчитанная при значениях параметров  $\kappa = 0,4$  и  $y_{\text{лог}}^+ = 60$ , достаточно хорошо совпадает с экспериментальными данными [20] для изотермического течения в трубах при низкой турбулентности ( $Re = 10000$ ). Коэффициенты полинома (3.15) для нее представлены в табл. 1. Кривая 2, полученная при параметрах  $\kappa = 0,41$  и  $y_{\text{лог}}^+ = 50$ , удовлетворительно ложится на экспериментальные точки [18, 19] изотермического пограничного слоя на пластине при высоких числах Рейнольдса. Коэффициенты полинома (3.15) даны для нее в табл. 2.

Закономерное изменение значений универсальной постоянной  $k$  в зависимости от числа Рейнольдса подтверждается расположением на рис. 3.4 кривой 3, рассчитанной для промежуточных значений параметров  $k = 0,407$  и  $y_{\text{лог}}^+ = 53$ . Она удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, полученными в [20] при умеренной турбулентности ( $Re = 24600$ ).

Таблица 1  
Коэффициенты полинома (3.15) для кривой 1 на рис. 3.4

$c_0$	$c_1$	$10^4 c_2$	$10^4 c_3$	$10^4 c_4$	$10^6 c_5$	$10^8 c_6$	$10^{10} c_7$	$10^{11} c_8$
– в вязком подслое при $y_+ < 11$ :								
0	1	1	-10,7	7,17	-248	3000	-15800	3200
– в буферном подслое при $11 < y_+ < 60$ :								
-2,35	1,978	-1271,6	53,963	-1,5257	2,8411	-3,3434	2,2536	-0,0663

Таблица 2  
Коэффициенты полинома (3.15) для кривой 2 на рис. 3.4

$c_0$	$c_1$	$10^4 c_2$	$10^4 c_3$	$10^4 c_4$	$10^6 c_5$	$10^8 c_6$	$10^{10} c_7$	$10^{11} c_8$
– в вязком подслое при $y_+ < 11$ :								
0	1	1	-10,6	7,18	-248	2990	-15870	3200
– в буферном подслое при $11 < y_+ < 50$ :								
-2,58	1,986	-1296	55,4	-1,57	2,9135	-3,395	2,255	-0,0653

С помощью формул (3.13) и (3.14) определена безразмерная толщина изотермического вязкого подслоя ( $\delta_{o+} \equiv \delta_o u_* / \nu \approx 11$ ), исходя из условия, что на его границе соотношение коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости  $\nu_T / \nu$  в равенстве (3.10) равно единице. Буферному подслою, где турбулентные пульсации частично приглушаются близостью стенки, соответствуют расчетные значения безразмерной координаты в интервале от  $y_+ = 11$  до  $y_+ = y_{\text{лог}}^+$ .

На безразмерном расстоянии от стенки  $y_+ = y_{\text{лог}}^+$  происходит формальный переход к логарифмическому закону изменения скорости (3.12), причем постоянная интегрирования  $C$  имеет разные значения для кривых 1 и 2 на рис. 3.4 ( $C = 5,46$  и  $5,1$  соответственно). Фактическая область логарифмического закона изменения скорости начинается при  $y_+ \approx 0,7 y_{\text{лог}}^+$ , что позволяет считать, что практически именно здесь лежит граница равновесного подслоя.

## § 5. Неизотермический пограничный слой

При математическом моделировании процессов переноса в высокотемпературных газах следует учитывать изменение их плотности и вязкости в пограничном слое, различая плотность газов  $\rho_{\text{ст}}$  при температуре стенки и  $\rho$  в ближайшем к стенке узле сетки. Полезно рассмотреть при этом возможность применения полуэмпирической гипотезы пристенной турбулентности Прандтля в неизотермических условиях, полагая по-прежнему касательное напряжение вблизи стенки приблизительно постоянным и рассматривая его как сумму напряжений, возникающих вследствие молекулярного и турбулентного переноса:

$$\sigma_{\text{ст}} \equiv \rho_{\text{ст}} u_*^2 \approx \rho \nu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2,$$

Динамическая скорость определена здесь с помощью плотности среды  $\rho_{\text{ст}}$  при температуре поверхности стенки:

$$u_* \equiv \sqrt{\sigma_{\text{CT}}/\rho_{\text{CT}}}.$$

В правой части предыдущего равенства следует приближенно заменить динамическую вязкость газов  $\rho\nu$  вблизи стенки ее значением  $\rho_{\text{CT}}\nu_{\text{CT}}$  при температуре стенки. Погрешность такой замены повлияет лишь на величину молекулярной составляющей силы трения, доля которой в результирующем касательном напряжении по большей части не велика. Тогда станет возможным представить это равенство в виде безразмерного квадратного уравнения [21]:

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{CT}}} l_+^2 (du_+/dy_+)^2 + du_+/dy_+ - 1 \approx 0,$$

определив безразмерные переменные следующими соотношениями размерных величин:

$$u_+ \equiv u/u_*, \quad y_+ \equiv y u_*/\nu_{\text{CT}}, \quad l_+ \equiv l u_*/\nu_{\text{CT}}.$$

Решение квадратного уравнения дает выражение для безразмерной производной от скорости в неизотермическом пограничном слое:

$$\frac{du_+}{dy_+} \approx \frac{\sqrt{4l_+^2 \rho/\rho_{\text{CT}} + 1} - 1}{2l_+^2 \rho/\rho_{\text{CT}}}. \quad (3.16)$$

Сопоставление его с выражением (3.7) гипотезы Прандтля приводит к формуле турбулентной вязкости в пристенной части неизотермического пограничного слоя:

$$\frac{\nu_T}{\nu_{\text{CT}}} \approx \frac{\sqrt{4l_+^2 \rho/\rho_{\text{CT}} + 1} - 1}{2\rho/\rho_{\text{CT}}}. \quad (3.17)$$

Формулы (3.16) и (3.17) отличаются от аналогичных равенств (3.9) и (3.10), справедливых для изотермического пограничного слоя, только тем, что их правые части содержат соотношение плотностей среды на стенке и рядом с ней.

Так как учет переменной плотности при интегрировании дифференциального выражения (3.16) выходит за пределы точности дискретных уравнений, распределение безразмерной скорости  $u_+$  неизотермической среды вблизи стенки остается неизвестным. Можно лишь утверждать, что возрастание температуры газообразной среды по нормали к стенке значительно меньше влияет на величину массовой скорости  $(\rho u)_+$ , поскольку температурные изменения линейной скорости  $u_+$  и плотности  $\rho$  газа частично компенсируют друг друга.

### § 6. Граничные условия к уравнениям движения

На рис. 3.4 безразмерная односторонняя производная на поверхности стенки  $(\partial u_+ / \partial y_+)_{ст}$  представлена геометрически тангенсом угла наклона касательной 4 к кривой распределения скорости, а ее дискретное значение – тангенсом угла наклона хорды 5. Уже на безразмерном расстоянии  $y_+ > 6$  кривая безразмерной скорости начинает заметно отклоняться от касательной 4.

Учитывая нелинейность кривой на рис. 3.4, непосредственная замена в граничных условиях односторонней производной от скорости ее дискретным значением допустима только при расположении пристенного узла  $P$  сетки на очень малом расстоянии от стенки. На крупной сетке дискретное выражение занижает величину односторонней производной:

$$\frac{u_P - u_{ст}}{y_P} < \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ст},$$

где  $u_P$  – скорость в узле  $P$  сетки;  $u_{ст}$  – скорость движения поверхности стенки;  $y_P$  – расстояние от стенки до узла  $P$ .

Для корректного вычисления на поверхности стенки односторонней производной от продольной скорости следует принять во внимание, что соотношение между величиной этой производной и ее дискретным значением остается неизменным при

переходе к безразмерным координатам, а производная от безразмерной скорости равна единице в начале координат:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{ст}} \Big/ \frac{u_P - u_{\text{ст}}}{y_P} = \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right)_{\text{ст}} \Big/ \left(\frac{u_+}{y_+}\right)_P = 1 \Big/ \left(\frac{u_+}{y_+}\right)_P.$$

Отсюда следует [10], что для нахождения на стенке одно-сторонней производной от размерной скорости в изотермическом пограничном слое достаточно поделить ее дискретное значение на соотношение  $(u_+/y_+)_P$ , соответствующее положению пристенного узла  $P$  сетки на кривой изменения безразмерной скорости вблизи стенки:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{u_P - u_{\text{ст}}}{y_P} \left(\frac{y_+}{u_+}\right)_P. \quad (3.18)$$

Фактически здесь использовано правило вычисления неизвестной целой величины по известной ее доле.

Чтобы применить такой же подход при формулировке граничных условий к уравнениям движения (3.3) – (3.5) в неизотермическом пограничном слое, потребуется найти хотя бы приближенное распределение в пристенной области безразмерной массовой скорости  $(\rho u)_+$ , определение которой может быть дано следующей формулой:

$$(\rho u)_+ \equiv \frac{\rho u}{\rho_{\text{ст}} u_*}.$$

Представим производную от безразмерной массовой скорости в виде двух слагаемых по правилу дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{d(\rho u)_+}{dy_+} \equiv \frac{d(\rho u)}{\rho_{\text{ст}} u_* dy_+} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ст}}} \frac{du_+}{dy_+} + \frac{u_+}{\rho_{\text{ст}}} \frac{d\rho}{dy_+}.$$

Последнее слагаемое придется отбросить, так как его величина не известна. Можно лишь отметить, что на поверхности

стенки отброшенное слагаемое равно нулю. В итоге, вблизи стенки высокотемпературной установки, где производная от плотности  $\rho$  по координате  $y_+$ , как правило, отрицательна, скорректированное значение производной от безразмерной массовой скорости окажется несколько завышенным.

Используя здесь формулу (3.16), найдем, что производной от безразмерной массовой скорости вблизи стенки может быть дана количественная оценка с помощью следующего приближенного выражения, равного единице в начале координат:

$$\frac{d(\rho u)_+}{dy_+} \approx \frac{\rho}{\rho_{\text{ст}}} \frac{du_+}{dy_+} = \frac{\sqrt{4l_+^2 \rho / \rho_{\text{ст}} + 1} - 1}{2l_+^2}. \quad (3.19)$$

Правая часть формулы (3.19) для производной от безразмерной массовой скорости  $(\rho u)_+$  теперь мало отличается от аналогичного выражения (3.9) для производной от безразмерной линейной скорости изотермической среды. Действительно, в вязком подслое вблизи стенки, где длина пути смещения  $l_+$  очень мала, эти формулы практически совпадают.

Следовательно, в определенных условиях может оказаться допустимой приближенная замена безразмерного распределения массовой скорости  $(\rho u)_+$  в неизотермическом пристенном слое известным безразмерным распределением линейной скорости в изотермических условиях  $u_+^{(\text{изо})}$ , найденным, например, с помощью уравнений (3.15) и (3.12) для кривых 1 и 2 на рис. 3.4. В итоге выражение (3.18) трансформируется применительно к неизотермической среде в следующее соотношение:

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_{\text{ст}} \approx \frac{(\rho u)_P - (\rho u)_{\text{ст}}}{y_P} \left( \frac{y_+}{u_+^{(\text{изо})}} \right)_P = \frac{(\rho u)_P - (\rho u)_{\text{ст}}}{y_P} m_+^{(u)}, \quad (3.20)$$

где  $m_+^{(u)}$  – поправочный множитель к дискретному значению производной от массовой скорости на поверхности стенки,

$$m_+^{(u)} = (y_+ / u_+^{(изо)})_P.$$

За пределами вязкого подслоя, при соотношении плотностей  $\rho / \rho_{ст}$  в числителе формулы (3.19) меньшем единицы, такая замена несколько занижает расчетную величину массовой скорости. Сопоставление расчетных результатов с экспериментальными измерениями показывает, что точность учета неизотермичности пограничного слоя в газообразной среде может быть улучшена, если в формулу (3.17) для турбулентной вязкости  $\nu_T$  вблизи стенки подставлять кинематический коэффициент вязкости  $\nu_P$ , вычисленный по локальной температуре газа в узле  $P$  сетки, вместо коэффициента  $\nu_{ст}$  при температуре стенки:

$$\left( \frac{\nu_T}{\nu} \right)_P \approx \frac{\sqrt{4l_+^2 \rho / \rho_{ст} + 1} - 1}{2 \rho / \rho_{ст}}. \quad (3.21)$$

Такой эмпирический прием позволяет в основном устранить недооценку поправочного множителя  $m_+^{(u)}$  на достаточно большом удалении сеточного узла от стенки. Все же, если узел  $P$  сетки попадает в вязкий подслой, то коэффициент кинематической вязкости в формуле (3.17) следует по-прежнему рассчитывать по температуре стенки. Очевидно, что эти две расчетные области разделены неким переходным интервалом в буферном подслое.

Изложенный здесь способ корректировки граничных условий к уравнениям переноса количества движения в турбулентном потоке дает адекватные результаты при отсутствии заметного искажения или деформации универсальной кривой изменения безразмерной скорости  $u_+$  вблизи стенки. Это ограничение может нарушаться в потоках с обратным градиентом давления и, в особенности, в области отрыва пограничного слоя. В таких условиях необходимо уменьшать шаги сетки в пристенной части пограничного слоя, обеспечивая расположение ближайших к стенке узлов сетки в пределах вязкого подслоя.

## § 7. Стандартная модель турбулентности

Развитое турбулентное движение в настоящее время моделируется чаще всего с помощью стандартной двухпараметрической диссипативной модели, хотя более перспективным считается прямое моделирование турбулентных (рейнольдсовых) напряжений.

Согласно гипотезе Колмогорова, при развитом турбулентном движении турбулентный аналог кинематического коэффициента вязкости  $\nu_T$  можно считать пропорциональным квадратному корню из кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и среднему размеру  $l_T$  вихрей, в которых преимущественно концентрируется энергия турбулентных пульсаций:

$$\nu_T = C_\nu k_T^{1/2} l_T.$$

Масштаб турбулентности  $l_T$ , в свою очередь, связан следующей функциональной зависимостью с кинетической энергией турбулентности  $k_T$  и скоростью диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon_T$ :

$$\varepsilon_T = C_\varepsilon k_T^{3/2} / l_T.$$

Здесь  $C_\nu$  и  $C_\varepsilon$  – коэффициенты пропорциональности.

Объединяя два последних выражения, получают формулу, позволяющую рассчитывать коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  по локальным значениям кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon_T$ :

$$\nu_T = C_\mu k_T^2 / \varepsilon_T, \quad (3.22)$$

где  $C_\mu$  – коэффициент пропорциональности ( $C_\mu = 0,09$ ).

Формула (3.22) лежит в основе стандартной двухпараметрической диссипативной модели турбулентности. Значения составляющих стандартной модели, – кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon_T$ , находят в узлах сетки посредством численного решения двух дифференциальных

уравнений. Так как кинетическая энергия турбулентности  $k_T$  подчиняется закону сохранения, то, преобразуя дифференциальные уравнения Рейнольдса, получают для нее теоретически обоснованное дифференциальное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \rho u k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w k_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial k_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{эф}} \frac{\partial k_T}{\partial z} \right) = \rho (G_T - \varepsilon_T), \quad (3.23)$$

где  $\mu_{\text{эф}}$  – эффективный аналог динамического коэффициента вязкости;  $\varepsilon_T$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности,  $G_T$  – скорость генерации энергии турбулентности,

$$G_T = 2v_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + v_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

Полезно записать последнее выражение также и в цилиндрической системе координат:

$$G_T = 2v_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{v}{r} \right)^2 \right] + v_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + r \frac{\partial (w/r)}{\partial r} \right)^2 \right].$$

В стандартной модели построение дифференциального уравнения переноса для скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon_T$  выполняют приближенно, полагая, что члены этого уравнения пропорциональны аналогичным слагаемым в уравнении для  $k_T$  и применяя поправочные коэффициенты, полученные из экспериментов [22]:

$$\frac{\partial \rho u \varepsilon_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \varepsilon_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \varepsilon_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial z} \right) = \rho \frac{\varepsilon_T}{k_T} (c_{\varepsilon 1} G_T - c_{\varepsilon 2} \varepsilon_T), \quad (3.25)$$

где  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ;  $c_{\varepsilon 1} = 1,44$  и  $c_{\varepsilon 2} = 1,92$  – эмпирические коэффициенты.

Следует обратить внимание на особенности дискретизации источниковых членов уравнений переноса (3.23) и (3.25), содержащих разность близких по величине выражений. Чтобы стала возможной сходимость итераций, необходимо выражения, перед которыми стоит отрицательный знак, перенести в левую часть дискретных уравнений, скорректировав коэффициент  $a_p$  по формуле (1.25).

При этом в правой части уравнения (3.23) для кинетической энергии турбулентности скорость диссипации  $\varepsilon_T$  обычно заменяют соотношением, содержащим  $k_T$  в качестве множителя,

$$\varepsilon_T = \frac{\varepsilon_T}{k_T} k_T,$$

так что в частном случае стационарного течения формула (1.25) будет иметь следующий вид:

$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho \frac{\varepsilon_T}{k_T}.$$

Как следствие, дискретные аналоги дифференциальных уравнений переноса (3.23) и (3.25) оказываются тесно связанными между собой отношением  $\varepsilon_T/k_T$ , вычисление которого простым делением входящих в него величин может оказаться недостаточно корректным. Например, случайное занижение величины  $k_T$  в ходе итераций вызывает увеличение отношения  $\varepsilon_T/k_T$ , что приводит к дальнейшему занижению значения кинетической энергии турбулентности  $k_T$  при расчете его по дискретному аналогу дифференциального уравнения (3.23).

В отсутствии ограничительных факторов неустойчивость при вычислении кинетической энергии турбулентности может привести к заметной погрешности расчетных результатов. Поэтому представляется более целесообразным при численном решении уравнений (3.23) и (3.25) определять величину  $\varepsilon_T/k_T$  косвенным способом, например, преобразуя выражение (3.22) для турбулентной вязкости:

$$\frac{\varepsilon_T}{k_T} = \sqrt{C_\mu \frac{\varepsilon_T}{\nu_T}}.$$

Можно отметить как положительный момент, что при вычислении скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon_T$  по дискретному аналогу дифференциального уравнения (3.25) неустойчивость такого рода не проявляется.

После численного решения дифференциальных уравнений (3.23) и (3.25) коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  может быть определен по формуле (3.22) практически во всей области развитого турбулентного движения жидкости, включая равновесный подслой пристенной части пограничного слоя.

Несмотря на популярность стандартной диссипативной модели турбулентности, ее применение имеет некоторые ограничения. Она хорошо приспособлена в основном к сдвиговым течениям, происходящим без отрыва пограничного слоя.

## **§ 8. Реализуемая модель турбулентности**

Название модели связано с ее способностью принимать во внимание физические ограничения, накладываемые на реинольдсовы напряжения. Реализуемая модель турбулентности [23] отличается от стандартной модели уточненным алгоритмом расчета турбулентной вязкости и применением теоретически обоснованного дифференциального уравнения для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности. Согласно авторам метода, она способна моделировать развитые турбулент-

ные течения с вращением и рециркуляцией потока, с обратным градиентом давления и отрывом пограничного слоя.

В реализуемой модели используется формально та же формула для турбулентной вязкости, что и в стандартной модели турбулентности,

$$v_T = C_\mu k_T^2 / \varepsilon_T, \quad (3.26)$$

но коэффициент пропорциональности  $C_\mu$  в ней не является постоянной величиной. Он рассчитывается по выражению, в котором постоянным является лишь один параметр  $A_0 = 4$ :

$$C_\mu = 1 / \left( A_0 + A_s U^* \frac{k_T}{\varepsilon_T} \right).$$

Чтобы изложить порядок вычисления множителя  $A_s$  в этой формуле, составляющие тензора скоростей деформации записывают в тензорных обозначениях,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

и находят его среднеквадратичную величину

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}.$$

Затем вычисляют параметры

$$W = S_{ij} S_{jk} S_{ki} / \tilde{S}^3,$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} W),$$

и, наконец, сам коэффициент:

$$A_s = \sqrt{6} \cos \phi.$$

Множитель  $U^*$  определяют по формуле

$$U^* = \sqrt{S_{ij} S_{ij} + \Omega_{ij} \Omega_{ij}},$$

где тензор  $\Omega_{ij}$  учитывает локальное вращение элементов среды. В стационарной (не вращающейся) системе координат его компоненты вычисляются по формуле:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Перемножая тензоры, следует помнить соглашение, согласно которому каждому индексу в тензорной записи последовательно присваиваются цифровые значения 1, 2 и 3, а выражения с повторяющимися индексами суммируются при замене этих индексов цифрами. В результате произведение двух тензоров  $S_{ij}S_{ij}$  будет представлено в виде суммы из девяти слагаемых:

$$S_{ij}S_{ij} = S_{1j}S_{1j} + S_{2j}S_{2j} + S_{3j}S_{3j} = S_{11}S_{11} + S_{21}S_{21} + S_{31}S_{31} + \\ + S_{12}S_{12} + S_{22}S_{22} + S_{32}S_{32} + S_{13}S_{13} + S_{23}S_{23} + S_{33}S_{33}.$$

Симметричность тензора скоростей деформации, вследствие которой допускается перестановка индексов ( $S_{ij} = S_{ji}$ ), позволяет сократить число вычисляемых слагаемых до шести:

$$S_{ij}S_{ij} = S_{11}S_{11} + S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33} + 2S_{12}S_{12} + 2S_{23}S_{23} + 2S_{31}S_{31}.$$

Произведение двух тензоров  $\Omega_{ij}\Omega_{ij}$  выполняется с учетом равенства нулю их диагональных компонент ( $\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0$ ):

$$\Omega_{ij}\Omega_{ij} = 2\Omega_{12}\Omega_{12} + 2\Omega_{23}\Omega_{23} + 2\Omega_{31}\Omega_{31}.$$

Произведение трех тензоров  $S_{ij}S_{jk}S_{ki}$  состоит в общем случае из 27 слагаемых, причем симметричность тензора скоростей деформации позволяет часть из них объединить и сократить число вычисляемых слагаемых до десяти:

$$S_{ij}S_{jk}S_{ki} = S_{11}S_{11}S_{11} + S_{22}S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33}S_{33} + \\ + 3S_{11}S_{12}S_{12} + 3S_{11}S_{31}S_{31} + 3S_{22}S_{12}S_{12} + 3S_{22}S_{23}S_{23} + \\ + 3S_{33}S_{23}S_{23} + 3S_{33}S_{31}S_{31} + 6S_{12}S_{23}S_{31}.$$

Записывая тензорные компоненты в цилиндрической системе координат, нужно иметь в виду правила дифференцирования вектора скорости по криволинейным координатам [12]:

$$S_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad S_{22} = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad S_{33} = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{v}{r},$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + r \frac{\partial(w/r)}{\partial r} \right), \quad S_{31} = S_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right).$$

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \Omega_{23} = -\Omega_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - r \frac{\partial(w/r)}{\partial r} \right),$$

$$\Omega_{31} = -\Omega_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{r \partial \varphi} \right).$$

Несмотря на усложненный набор формул, составляющих реализуемую математическую модель, ее алгоритм остается достаточно простым и вполне пригодным для компьютерной реализации.

## § 9. Уравнения реализуемой модели турбулентности

Чтобы завершить вычисление турбулентной вязкости  $\nu_T$  в узлах сетки по формуле (3.26), необходимо численно решить дифференциальные уравнения для кинетической энергии турбулентности  $k_T$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon_T$ .

Дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентности  $k_T$  в реализуемой модели практически остается таким же, как уравнение (3.23) в стандартной модели. Хотя скорость генерации энергии турбулентности  $G_T$  может по-прежнему вычисляться по формуле (3.24), более естественным в реализуемой модели будет ее представление через тензорное произведение:

$$G_T = 2\nu_T S_{ij} S_{ij} = \nu_T S^2,$$

где для удобства записи введена новая переменная [23],

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{2} \tilde{S}.$$

В результате дифференциальное уравнение для кинетической энергии турбулентности будет записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w k_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{эф} \frac{\partial k_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{эф} \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{эф} \frac{\partial k_T}{\partial z} \right) = \\ = \rho \left( \nu_T S^2 - \varepsilon_T \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Вывод дифференциального уравнения для скорости диссипации  $\varepsilon_T$  в реализуемой модели теоретически более обоснован, чем в стандартной модели турбулентности. Оно отличается от уравнения (3.25) стандартной модели членами, представляющими процессы генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности, и значениями эмпирических коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \varepsilon_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \varepsilon_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \varepsilon_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial z} \right) = \rho \left( C_1 S \varepsilon_T - C_2 \frac{\varepsilon_T^2}{k_T + \sqrt{\nu \varepsilon_T}} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $\sigma_\varepsilon = 1,2$ ;  $C_2 = 1,9$ .

Коэффициент  $C_1$  в этом уравнении предлагается определять с помощью компьютерной функции  $\max(a, b)$ , которая из двух величин  $a$  и  $b$  выбирает максимальную:

$$C_1 = \max(0.43, \eta / (5 + \eta)),$$

где параметр  $\eta$  вычисляется по формуле

$$\eta = S k_T / \varepsilon_T.$$

## § 10. Граничные условия в моделях турбулентности

Граничные условия к дифференциальным уравнениям реализуемой модели турбулентности формулируются так же, как и к уравнениям стандартной модели.

Так как на обтекаемой твердой поверхности скорость потока газов обычно равна нулю и параметры турбулентности не определяются, то граница расчетной области для дифференциальных уравнений диссипативных моделей турбулентности переносится в узлы сетки, ближайšie к стенкам. Чтобы учесть приглушение турбулентности вблизи стенки, в формулу турбулентной вязкости (3.22) вводится поправочная функция  $f_\mu$ , учитывающая снижение уровня турбулентности вблизи стенки [22]:

$$\nu_T = C_\mu f_\mu k_T^2 / \varepsilon_T, \quad (3.29)$$

Теоретически поправочная функция может быть представлена в виде соотношения величин турбулентной вязкости  $\nu_T$ , вычисленных по формуле (3.17) при экспоненциальном (3.13) и линейном (3.11) законах изменения длины пути смешения:

$$f_\mu = \frac{\sqrt{4\rho/\rho_{ст} (ky_+)^2 [1 - \exp(-y_+/A)]^2 + 1} - 1}{\sqrt{4\rho/\rho_{ст} (ky_+)^2 + 1} - 1}.$$

Эта формула показывает, что поправочная функция, равная нулю на поверхности стенки, постепенно возрастает до единицы, что исключает ее влияние на величину турбулентной вязкости в равновесном подслое.

Равенство скоростей диссипации  $\varepsilon_T$  и генерации  $G_T$  энергии турбулентности в равновесном подслое позволяет считать справедливым для него следующее выражение, в котором коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  представлен формулой (3.22),

$$\varepsilon_T = G_T \approx \nu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = C_\mu \frac{k_T^2}{\varepsilon_T} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

Из последнего равенства следует выражение для локальной производной от продольной скорости  $u$  в равновесном подслое:

$$\partial u / \partial y = C_{\mu}^{-1/2} \varepsilon_T / k_T ,$$

где вблизи стенки  $C_{\mu} = 0,09$ .

Другое выражение для локальной производной от скорости в равновесном подслое можно получить с помощью формулы, следующей из гипотезы Буссинеска (3.2),

$$u_*^2 \approx \nu_T \partial u / \partial y ,$$

подставив в нее выражение (3.22) для турбулентной вязкости:

$$\partial u / \partial y = u_*^2 / \nu_T = C_{\mu}^{-1} u_*^2 \varepsilon_T / k_T^2 .$$

Приравнивая друг другу правые части двух предыдущих формул для производной от скорости, находят величину  $k_T^{\text{ГП}}$  в равновесном подслое, применяемую в качестве граничного условия к дифференциальному уравнению кинетической энергии турбулентности:

$$k_T^{\text{ГП}} = C_{\mu}^{-1/2} u_*^2 . \quad (3.30)$$

При рассмотрении граничных условий иногда рекомендуют использовать это соотношение во всей пристенной области [24] в предположении, что величина кинетической энергии турбулентности остается примерно постоянной по нормали к стенке. При этом не учитывается повышение уровня турбулентности на границе вязкого подслоя и его снижение в самом вязком подслое, прилегающем к стенке. Все же представляется целесообразным частично скорректировать такую формулировку, принимая во внимание, что по экспериментальным данным, согласно [22], кинетическая энергия турбулентности на границе вязкого подслоя примерно на треть выше, чем в равновесном подслое.

Так как коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T^{\text{ГП}}$  на границе расчетной области численного моделирования может быть дос-

точно надежно найден по формулам (3.17) или (3.21) полуэмпирической гипотезы пристенной турбулентности, то представляется наиболее целесообразным определять по его величине граничное значение скорости диссипации энергии турбулентности с помощью уравнения (3.29) стандартной двухпараметрической диссипативной модели:

$$\varepsilon_T^{gp} = C_\mu f_\mu (k_T^{gp})^2 / v_T^{gp} . \quad (3.31)$$

Формула (3.31) дает корректное значение  $\varepsilon_T^{gp}$  во всех случаях, когда ближайший к стенке расчетный узел попадает в равновесный, буферный или вязкий подслой, что позволяет применять ее в качестве граничного условия к дифференциальным уравнениям (3.25) и (3.28) при построении вблизи стенки как крупной, так и достаточно мелкой сетки.

## Глава 4. ТЕПЛООТДАЧА, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС

### § 1. Способы переноса теплоты

Любое физическое тело обладает определенным количеством тепловой энергии, способной переходить в форме теплоты к менее нагретым теплоносителям. В открытой системе количество тепловой энергии определяют по величине термодинамического потенциала теплоносителя – энтальпии  $H$ .

В свою очередь, если за начало шкалы отсчета принять  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , то энтальпию можно поставить в зависимость от температуры теплоносителя:

$$H = \int_0^{t_k} c dt + \Delta H, \quad (4.1)$$

где  $c$  – удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К);  $\Delta H$  – скрытая часть энтальпии, не влияющая на температуру процесса, Дж/кг;  $t$  – температура по шкале Цельсия,  $^{\circ}\text{C}$ , связанная с термодинамической температурой  $T$ , К, простым соотношением:  $t = T - 273,15$ .

Перенос теплоты может происходить тремя способами: теплопроводностью (кондуктивный перенос), конвекцией (в составе конвективного переноса) и тепловым излучением (радиационный перенос). Кондуктивный перенос реализуется в чистом виде в твердых телах. Конвективный перенос осуществляется в жидкостях и газах совместно конвекцией и теплопроводностью. В газообразной среде может происходить сложный теплообмен одновременно теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Тепловым потоком  $Q$ , называют количество теплоты, прошедшее через поверхность теплообмена за единицу времени, а его плотностью  $q$  – локальную величину теплового потока, приходящуюся на единицу этой поверхности и направленную по нормали к ней.

Согласно закону Фурье и в соответствии с уравнением общего вида (1.6), вектор плотности кондуктивного теплового потока пропорционален градиенту температуры:

$$\mathbf{q}_T = -\lambda \cdot \text{grad } t = -\rho a c \cdot \text{grad } T, \quad (4.2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Для жидкой и газообразной среды применяется формула переноса теплоты конвекцией, аналогичная соотношению (1.5):

$$\mathbf{q}_K = \rho \mathbf{v} c t, \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости среды.

Согласно равенствам (4.2) и (4.3), тепловые потоки теплопроводностью и конвекцией зависят только от локальных значений температуры, скорости, градиента температуры и локальных теплофизических свойств теплоносителя.

Законы радиационного переноса теплоты намного сложнее. Прежде всего, при его рассмотрении необходимо иметь в виду, что твердые тела и газообразная среда, как правило, обладают способностью создавать тепловое излучение, самопроизвольно испуская в окружающее пространство в виде лучей электромагнитные волны (или фотоны). Лучистая энергия переносится в газообразной среде со скоростью света, частично поглощается по длине лучей средой и другими телами и вновь переходит при этом в тепловую энергию.

Так как в радиационном теплообмене участвуют физические тела, находящиеся друг от друга на некотором расстоянии, то его результаты оказываются в сильной интегральной зависимости не только от температуры и радиационных свойств этих тел, но и от условий излучения, поглощения и рассеяния лучистой энергии газообразной средой в пространстве между ними. Более подробно закономерности радиационного переноса теплоты в поглощающих и ослабляющих средах будут рассмотрены в следующей главе.

## § 2. Виды теплообменных процессов

Некоторые виды теплообмена имеют устойчиво употребляемые названия. К ним относится, прежде всего, теплопередача через стенку от одного жидкого или газообразного теплоносителя к другому, как схематично показано на рис. 4.1.

Теплопередача состоит из трех последовательных теплообменных процессов – теплоотдачи от горячего теплоносителя к стенке, теплопроводности через стенку и теплоотдачи от стенки к менее нагретому теплоносителю.

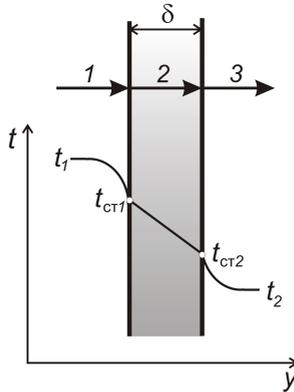


Рис. 4.1. Теплопередача через плоскую стенку толщиной  $\delta$ :  
1 – теплоотдача к стенке; 2 – теплопроводность через стенку;  
3 – теплоотдача от стенки;  $t_1$ ,  $t_2$  – температура теплоносителей;  
 $t_{ст1}$ ,  $t_{ст2}$  – температура поверхностей стенки

При постоянной величине коэффициента теплопроводности  $\lambda$  в уравнении (4.2) плотность потока теплоты  $q$ , переносимой стационарной теплопроводностью через стенку толщиной  $\delta$ , пропорциональна температурному напору, то есть разности значений температуры  $t_{ст1}$  и  $t_{ст2}$  поверхностей стенки:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{ст1} - t_{ст2}).$$

Формальная пропорциональность плотности теплового потока соответствующему температурному напору сохраняется в большинстве случаев также и в формулах конвективной теплоотдачи при обтекании поверхностей стенки теплоносителями, имеющими температуру  $t_1$  и  $t_2$ :

$$q = \alpha_1(t_1 - t_{ст1}),$$

$$q = \alpha_2(t_{ст2} - t_2),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи.

В результате расчетное уравнение для теплопередачи через однослойную плоскую стенку приобретает следующий относительно простой вид:

$$q = k(t_1 - t_2),$$

где  $k$  – коэффициент теплопередачи через плоскую стенку,

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (4.4)$$

Слагаемые в знаменателе представляют собой термические сопротивления теплообменных процессов, составляющих теплопередачу.

Коэффициенты конвективной теплоотдачи находятся в сложной зависимости от множества факторов, – от формы и шероховатости обтекаемой поверхности стенки, от физических свойств теплоносителей, от скорости и степени турбулентности потока. Поэтому в реальных условиях теплообмена коэффициенты конвективной теплоотдачи практически всегда рассчитываются по эмпирическим уравнениям, приведенным к безразмерному виду с помощью чисел подобия.

Например, хорошо известно уравнение для вынужденной конвекции, возникающей при турбулентном принудительном движении воздуха на участке стабилизированного теплообмена в трубах [25]:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,43}, \quad (4.5)$$

где  $Nu$  – число Нуссельта;  $Re$  – число Рейнольдса;  $Pr$  – число Прандтля.

При свободной турбулентной конвекции атмосферного воздуха у поверхности вертикальной стенки величина коэффициента теплоотдачи к воздуху может быть представлена эмпирическим уравнением [26]:

$$Nu = 0,15 (Gr \cdot Pr)^{0,33}, \quad (4.6)$$

где  $Gr$  – число Грасгофа, вычисленное по физическим параметрам воздуха вблизи стенки.

Однако далеко не всегда удается найти в литературе подходящее эмпирическое уравнение для расчета коэффициента теплоотдачи. Преимущество математического моделирования как раз и состоит в том, что оно дает возможность находить численное решение сложных задач конвективного теплопереноса.

### § 3. Основные понятия теплоотдачи излучением

Потоком излучения  $Q_{\text{л}}$  называют количество лучистой энергии, проходящее через поверхность физического тела за единицу времени. Поток лучистой энергии через элементарную площадку, выделенную на этой поверхности, приведенный к единице площади, образует поверхностную плотность потока полусферического излучения  $E$ .

В зависимости от источника лучей и направления потока излучения различают несколько видов поверхностной плотности потока излучения. На рис. 4.2 показаны плотности потоков собственного  $E_{\text{соб}}$  и падающего  $E_{\text{пад}}$  излучения на поверхности непрозрачной стенки. Падающее излучение частично поглощается ( $E_{\text{погл}}$ ), переходя в тепловую энергию стенки, и частично отражается ( $E_{\text{отр}}$ ). Потоки собственного и отраженного излучения образуют суммарный поток эффективного излучения стенки с поверхностной плотностью  $E_{\text{эф}}$ :

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}} .$$

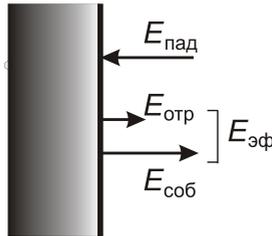


Рис. 4.2. Плотности потоков излучения на поверхности стенки:  
 $E_{\text{пад}}$  – падающего,  $E_{\text{отр}}$  – отраженного,  $E_{\text{соб}}$  – собственного,  
 $E_{\text{эф}}$  – эффективного

При одной и той же температуре реальные тела испускают меньшее количество лучистой энергии, чем абсолютно черное тело, поверхностная плотность излучения которого определяется законом Стефана–Больцмана:

$$E_{\text{соб}} = \varepsilon E_0 = \varepsilon \sigma T^4 , \quad (4.7)$$

где  $E_0$  – поверхностная плотность излучения абсолютно черного тела;  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности реального тела.

Способность тела поглощать падающую на него лучистую энергию характеризуется его поглощательной способностью:

$$A \equiv E_{\text{погл}} / E_{\text{пад}} ,$$

где  $E_{\text{погл}}$  – поглощаемая часть потока падающего излучения.

Для непрозрачных стенок в технических задачах, как правило, применяется равенство  $A_{\text{ст}} = \varepsilon_{\text{ст}}$ , свойственное серой поверхности. В результате отражательная способность непрозрачной серой стенки  $R_{\text{ст}}$  обычно определяется следующим равенством:

$$R_{\text{ст}} = 1 - \varepsilon_{\text{ст}} .$$

Падающий и эффективный потоки излучения направлены навстречу друг другу. Их разность создает результирующий поток излучения на поверхности стенки:

$$q_{\text{л.ст}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{эф}} .$$

Из баланса потоков на непрозрачной серой стенке следует полезная формула для поверхностной плотности эффективного потока излучения [27], которая успешно применяется в математических моделях теплообмена:

$$E_{\text{эф}} = \sigma T_{\text{ст}}^4 \pm \left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ст}}} - 1 \right) q_{\text{л.ст}} . \quad (4.8)$$

Знак "+" или "-" перед выражением в скобках зависит от направлением результирующего потока излучения. Если он направлен к стенке, то ставится плюс; в противном случае минус.

Полезно также рассмотреть баланс потоков излучения в замкнутой системе двух серых тел, схематично изображенной на рис. 4.3. Меньшее по размерам тело имеет выпуклую поверхность  $F_1$ , температура которой  $T_1$  и степень черноты  $\varepsilon_1$ . Оно окружено замкнутой поверхностью  $F_2$ , имеющей степень черноты  $\varepsilon_2$  и более низкую температуру  $T_2$ .

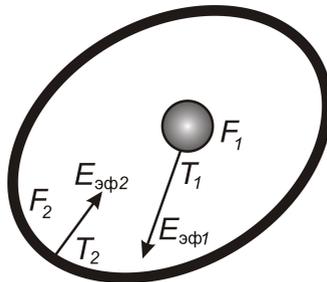


Рис. 4.3. Выпуклое тело (1), окруженное замкнутой поверхностью (2):  $F_1$ ,  $T_1$ ,  $E_{\text{эф}1}$  – поверхность, температура и эффективное излучение первого тела;  $F_2$ ,  $T_2$ ,  $E_{\text{эф}2}$  – поверхность, температура и эффективное излучение второго тела

Чтобы составить баланс потоков лучистой энергии, поверхностные плотности эффективных потоков излучения  $E_{эф1}$  и  $E_{эф2}$  обоих тел, представленные формулой (4.8), умножаются на соответствующие им поверхности тел  $F_1$  и  $F_2$ . Кроме того, вводится понятие углового коэффициента  $\psi_{i,j}$ , который показывает, какая часть лучистой энергии, исходящей от  $i$ -го тела попадает на поверхность  $j$ -го тела. В частности, угловой коэффициент излучения второго тела на первое на рис. 4.3 определяется по соотношению их поверхностей как  $\psi_{2,1} = F_1/F_2$ .

В итоге получают формулу для плотности результирующего потока излучения на поверхности более горячего тела:

$$q_1 = \varepsilon_{пр} \sigma (T_1^4 - T_2^4), \quad (4.9)$$

где  $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень черноты двух серых тел,

$$\varepsilon_{пр} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{F_1}{F_2} \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

Решение задачи кардинально меняется в тех случаях, когда пространство между телами заполнено газообразной средой, способной излучать и поглощать лучистую энергию. Математические модели радиационного переноса теплоты в селективных газах, частично поглощающих или ослабляющих потоки излучения, рассмотрены в гл. 5.

#### § 4. Математическая модель теплопроводности

Дифференциальное уравнение сохранения тепловой энергии при отсутствии переноса ее излучением следует из уравнения сохранения общего вида (1.4), если в качестве сохраняемой и переносимой величины рассматривать энтальпию  $H$ :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{q}_к + \operatorname{div} \mathbf{q}_т = Q_v, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{q}_к$ ,  $\mathbf{q}_т$  – плотности потоков теплоты, переносимой конвекцией и теплопроводностью;  $Q_v$  – "источник" тепловой энергии, выде-

ляющейся в элементарном объеме, например, при химических реакциях, приведенный к единице объема и единице времени.

Учитывая, что в твердом теле конвективный перенос отсутствует, и применяя соотношения (4.1) и (4.2), получают дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_v. \quad (4.12)$$

В частном случае, когда локальная температура не изменяется во времени, из (4.12) следует дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_v = 0. \quad (4.13)$$

Хотя численное решение уравнения стационарной теплопроводности методами, изложенными в гл. 1, не встречает, как правило, каких-либо трудностей, все же полезно рассмотреть один из вариантов построения сетки, применяемый при расчете потерь тепла через стены промышленной печи. В этом случае при постановке граничных условий принимается во внимание, что теплоотдача в окружающую среду происходит с участием всех трех способов переноса теплоты.

Чтобы найти плотность конвективного теплового потока  $q_{к.ст}$  на внешней поверхности стен печи, определим коэффициент теплоотдачи по эмпирическому уравнению (4.6),

$$\alpha_B \approx 0,15 \lambda_B \left( \frac{g}{v_B^2 T_B} Pr_B \right)^{0,33} (T_{ст} - T_B)^{0,33},$$

и умножим его на температурный напор теплоотдачи:

$$q_{к.ст} \approx 0,15 m_B (T_{ст} - T_B)^{1,33}.$$

Здесь для краткости записи уравнения применено следующее обозначение комплекса физических величин, взятых при температуре воздуха вблизи стенки:

$$m_B = \lambda_B \left( \frac{g}{\nu_B^2 T_B} Pr_B \right)^{0,33},$$

где  $\lambda_B$ ,  $\nu_B$  – коэффициенты теплопроводности и вязкости воздуха,  $g$  – ускорение свободного падения,  $Pr_B$  – число Прандтля воздуха,  $T_B$  – температура окружающего воздуха.

Чтобы определить величину теплоотдачи излучением на внешней поверхности стен, используем формулу (4.9) для плотности потока излучения, полагая, что поверхность стен помещения  $F_2$  много больше, чем излучающая поверхность стен печи:

$$q_{л.ст} \approx \varepsilon_{ст} \sigma (T_{ст}^4 - T_B^4).$$

Разностную сетку для дискретных уравнений целесообразно построить в соответствии с рис. 4.4, так чтобы на внешней поверхности стенки находился узел  $P$  половинного контрольного объема [3].

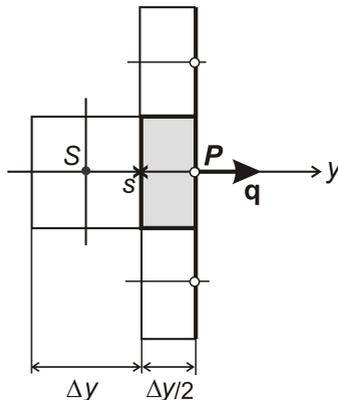


Рис. 4.4. Сетка с половинным контрольным объемом в математической модели теплопроводности стенки

Если принять, что "источник"  $Q_v$  отсутствует и реализуется одномерный перенос теплоты, то интегрирование дифференциального уравнения стационарной теплопроводности (4.13) по

половинному контрольному объему даст после подстановки пределов интегрирования следующий результат:

$$\lambda_s \frac{T_S - T_P}{\Delta y} = - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_P.$$

Правая часть этого равенства, определяющая тепловой поток, подводимый изнутри к поверхности стенки, равна плотности суммарного потока теплоты, отводимой от нее в окружающую среду. При этом условии уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\lambda_s}{\Delta y} (T_S - T_P) = 0,15 m_b (T_P - T_B)^{1,33} + \varepsilon_{\text{CT}} \sigma (T_P^4 - T_B^4). \quad (4.14)$$

После линеаризации источникового члена последнего равенства получим расчетное дискретное уравнение:

$$a_P T_P = a_S T_S + d_P,$$

все коэффициенты и свободный член которого положительны;

$$a_S = \frac{\lambda_s}{\Delta y^2}; \quad a_P = a_S + \left( 0,15 m_b (T_P - T_B)^{0,33} + 4 \varepsilon_{\text{CT}} \sigma T_P^3 \right) / \Delta y,$$

$$d_P = \left\{ 0,15 m_b T_B (T_P - T_B)^{0,33} + \varepsilon_{\text{CT}} \sigma T_B^4 + 3 \varepsilon_{\text{CT}} \sigma T_P^4 \right\} / \Delta y.$$

Нетрудно убедиться, что после подведения подобных слагаемых дискретное уравнение полностью совпадет с исходным равенством (4.14), еще не подвергнутым линеаризации.

## § 5. Нестационарный теплоперенос в массивном теле

В задачах нестационарной теплопроводности в настоящее время применяются разнообразные аналитические и численные методы [28]. Теоретические решения дифференциального уравнения (4.12) приводят, как правило, к чрезмерно сложным расчетным формулам даже при упрощенной постановке одномерной задачи нестационарной теплопроводности при постоянных значениях коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и теплоотдачи. Все же отдельные достижения аналитического подхода могут с успехом совмещаться с численными методами.

К ним относится задача нестационарного переноса теплоты теплопроводностью в полубесконечном массивном теле при внезапном изменении температуры его поверхности. Похожий процесс нестационарного теплообмена происходит в цементных вращающихся печах, когда участки стен печи попадают под слой клинкера и температура их поверхности при контакте с обжигаемым материалом внезапно скачкообразно изменяется.

Теоретическая задача формулируется следующим образом. Исходное распределение температуры массивного тела по координате  $x$ , направленной по нормали к его поверхности, полагается известным. В момент начала нестационарного теплообмена температура этой поверхности мгновенно приобретает более высокое значение, которое в дальнейшем остается неизменным во времени. В последующие моменты времени происходит постепенное выравнивание температуры по глубине массивного тела, как показано на рис. 4.5, и на поверхности тела возникает нестационарный тепловой поток с плотностью  $q_n$ .

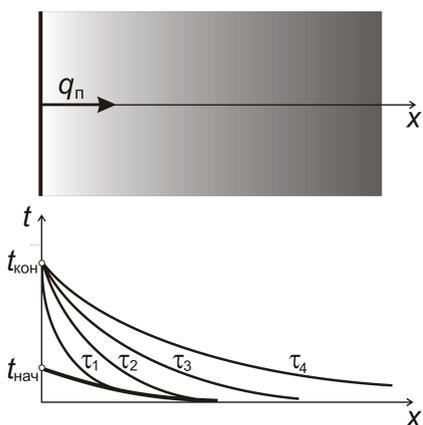


Рис. 4.5. Схематичное изображение полубесконечного массивного тела и распределение его температуры в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ :

$t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}$  – температура до и после температурного скачка;  
 $q_n$  – плотность теплового потока на поверхности тела

Теоретическое решение дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности (4.12), выполненное для одномерной задачи при заданных начальных условиях на поверхности массивного тела, позволило получить распределение температуры в полубесконечном массивном теле для любого момента времени после температурного скачка, а также аналитическое выражение для плотности теплового потока на его поверхности [27]:

$$q_{\text{ак}} = b (t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}}), \quad (4.15)$$

где  $t_{\text{нач}}$  – начальная температура поверхности полуограниченного массива;  $t_{\text{кон}}$  – температура этой же поверхности после ее скачкообразного изменения;  $b$  – коэффициент теплоусвоения

$$b = \sqrt{\frac{\rho c \lambda}{\pi \tau}},$$

$\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  – соответственно плотность, удельная массовая теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала массивного тела;  $\tau$  – время, прошедшее после температурного скачка.

Интегрирование уравнения (4.15) по времени приводит к выражению для количества теплоты, отведенной от поверхности вглубь массивного тела за время  $\tau$ :

$$Q = \sqrt{\rho c \lambda / \pi} (t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}}) \int_0^{\tau} \tau^{-1/2} d\tau = 2b (t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}}) \tau.$$

В [27] отмечается аналогия между коэффициентом  $\alpha$  теплоотдачи от поверхности твердого тела во внешнюю среду и коэффициентом теплоусвоения  $b$ , который характеризует внутреннюю теплоотдачу вглубь массивного тела от его поверхности. Коэффициент теплоусвоения дает возможность сравнивать интенсивности нестационарного кондуктивного подвода или отвода теплоты на поверхности массивных тел, выполненных из разных материалов.

## § 6. Математическая модель нагрева гранулы

Численные методы моделирования позволяют определять нестационарное распределение температуры в телах любой формы с переменными физическими свойствами в условиях сложной радиационно-конвективной теплоотдачи. Они могут быть применены, например, к процессу нестационарной теплопроводности в гранулах технологического материала, обжигаемого в промышленных печах, если построить для этих гранул математическую модель кондуктивного переноса теплоты в сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$ .

В сферической грануле, изображенной на рис. 4.6, положение узла  $P$  сетки определяется расстоянием по координате  $R$  от центра сферы, полярным углом  $\theta$  и азимутальным углом  $\varphi$ . Проекция узла  $P$  на горизонтальную азимутальную плоскость представлена точкой  $P'$ , расстояние  $r$  до которой от центра сферы зависит от координат  $R$  и  $\theta$ :

$$r = R \sin \theta .$$

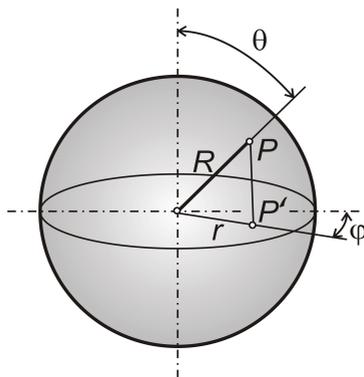


Рис. 4.6. Сферическая система координат  $(R, \theta, \varphi)$  в объеме гранулы

Дифференциальное уравнение переноса теплоты нестационарной теплопроводностью в грануле записывается с учетом криволинейности сферической системы координат:

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{R^2 \partial R} \left( \lambda R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{R \partial \theta} \right) - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{r \partial \varphi} \right) = S_v,$$

где  $S_v$  – источниковый член уравнения, отличающийся от нуля лишь при наличии эндо- или экзотермических физико-химических преобразований в материале гранулы.

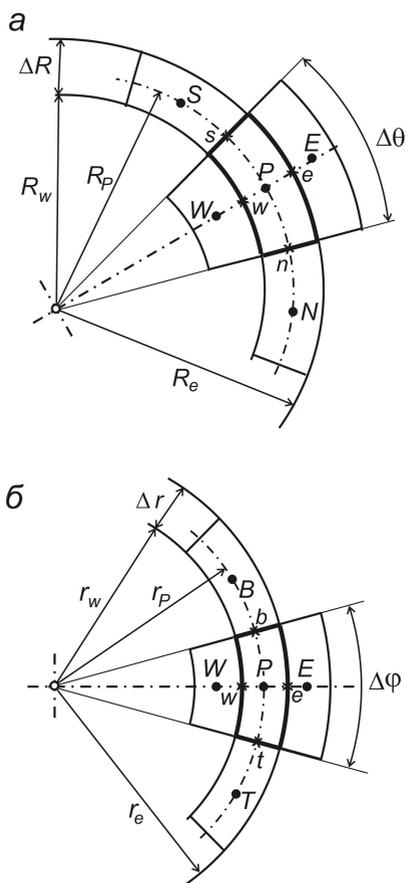


Рис. 4.7. Контрольные объемы в сферической грануле по осям координат  $R, \theta$  (а) и  $R, \varphi$  (б):  $P, W, E, S, N, B, T$  – узлы сетки;  $w, e, s, n, b, t$  – грани контрольного объема;  $\Delta R, \Delta\theta, \Delta\varphi$  – размеры контрольного объема

На рис. 4.7 представлена система контрольных объемов для приведения к дискретному виду дифференциального уравнения переноса теплоты в сферических координатах.

Дискретизация дифференциального уравнения переноса теплоты выполняется посредством его интегрирования по контрольному объему, выделенному на рисунке:

$$\frac{\rho_P c_P T_P - \rho_P^0 c_P^0 T_P^0}{\Delta \tau} - \frac{1}{R_P^2 \Delta R} \left[ \lambda_e R_e^2 \frac{T_E - T_P}{\Delta R} - \lambda_w R_w^2 \frac{T_P - T_W}{\Delta R} \right] -$$

$$- \frac{1}{r_P \Delta \theta} \left[ \lambda_n \sin \theta_n \frac{T_N - T_P}{R_P \Delta \theta} - \lambda_s \sin \theta_s \frac{T_P - T_S}{R_P \Delta \theta} \right] - \frac{1}{r_P \Delta \varphi} \left[ \lambda_t \frac{T_T - T_P}{r_P \Delta \varphi} - \lambda_b \frac{T_P - T_B}{r_P \Delta \varphi} \right] = S_{VP}.$$

Теперь дискретный алгебраический аналог дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности может быть записан в обобщенной форме в сферической системе координат по образцу дискретного уравнения (1.15) при условии, что компоненты скорости равны нулю:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + d_P. \quad (4.16)$$

Здесь коэффициенты и свободный член уравнения для внутренних узлов сетки представлены следующими формулами:

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta R^2} \frac{R_w^2}{R_P^2}, \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta R^2} \frac{R_e^2}{R_P^2},$$

$$a_S = \frac{\lambda_s}{\Delta \theta^2} \frac{\sin \theta_s}{R_P^2 \sin \theta_P}, \quad a_N = \frac{\lambda_n}{\Delta \theta^2} \frac{\sin \theta_n}{R_P^2 \sin \theta_P},$$

$$a_B = \frac{\lambda_b}{\Delta \varphi^2} \frac{1}{R_P^2 \sin^2 \theta_P}, \quad a_T = \frac{\lambda_t}{\Delta \varphi^2} \frac{1}{R_P^2 \sin^2 \theta_P},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P c_P / \Delta \tau,$$

$$d_P = S_{VP} + \rho_P^0 c_P^0 T_P^0 / \Delta \tau.$$

В дискретное уравнение (4.16) для контрольных объемов, примыкающих к поверхности гранулы, могут войти дополнительные слагаемые, связанные с формулировкой граничных условий и линеаризацией источникового члена уравнения, как это было показано на примере дискретного уравнения (4.14). В особой точке в центре гранулы производная от температуры по радиусу считается равной нулю, что соответствует равенству нулю локального теплового потока.

Чтобы обеспечить адекватность численной реализации математической модели, расчетные интервалы времени  $\Delta t$  должны приниматься минимальными в начале процесса охлаждения или нагрева гранулы, когда её температура изменяется особенно быстро.

## § 7. Конвективный теплоперенос

Дифференциальное уравнение переноса теплоты в жидкой или газообразной среде одновременно теплопроводностью и конвекцией получают, подставляя законы переноса (4.2) и (4.3) в уравнение сохранения тепловой энергии (4.11):

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u c T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v c T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w c T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_v.$$

Следует обратить внимание, что в таком виде дифференциальное уравнение не вполне пригодно для моделирования теплообмена в газообразной среде. В конвективные члены этого уравнения входит произведение плотности газов на термодинамическую температуру  $\rho T$ . Так как в каждой итерации значение плотности уточняется в соответствии с локальной температурой среды по формуле (1.1), то искомая температура  $T$  сокращается согласно следующему равенству:

$$\rho T = \left( \rho_o \frac{T_o}{T} \right) T = \rho_o T_o,$$

и выпадает из расчета переноса теплоты конвекцией.

Очевидно, что использование такого "неполноценного" расчетного уравнения для термодинамической температуры приведет к ухудшению сходимости итераций и затруднит решение инженерных задач переноса теплоты в высокотемпературных газах. Чтобы полностью исключить указанную проблему из математической модели, следует в дифференциальное уравнение конвективного теплопереноса ввести компоненты вектора массовой скорости ( $\rho\mathbf{v}$ ) вместо линейной скорости. В результате достигается кардинальное улучшение структуры дискретных уравнений конвективного переноса теплоты, хотя, как показано в гл. 2, несколько усложняется математическая формулировка и численное решение дискретных уравнений движения в приближении несжимаемой жидкости.

При моделировании теплообмена в турбулентной жидкой или газообразной среде в расчетные уравнения вводятся эффективные коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{\text{эф}}$  (или теплопроводности  $a_{\text{эф}}$ ), учитывающие суммарную интенсивность молекулярного и турбулентного переноса. В результате дифференциальное уравнение конвективного теплопереноса приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u) c T}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v) c T}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w) c T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_v. \quad (4.17)$$

Здесь компоненты массовой скорости заключены в скобки.

Обычно эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\text{эф}}$  вычисляют по величине коэффициентов молекулярной и турбулентной вязкости с помощью соответствующих чисел Прандтля  $Pr$  и  $Pr_T$ , причем расчетное значение турбулентного числа Прандтля  $Pr_T$  может находиться, согласно экспериментальным данным, в диапазоне от 0,7 до единицы. Так как молекулярная со-

ставляющая эффективного коэффициента теплопроводности много меньше турбулентной, ее величиной часто пренебрегают:

$$\lambda_{\text{эф}} \equiv \rho c a_{\text{эф}} = c \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \approx c \frac{\mu_T}{Pr_T}, \quad (4.18)$$

где  $c$  – удельная массовая теплоемкость среды при постоянном давлении.

Дискретный алгебраический аналог дифференциального уравнения (4.17) записывается в обобщенной форме по образцу дискретного уравнения (1.17) с разностями против потока:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + d_P. \quad (4.19)$$

Эффективный коэффициент теплопроводности в коэффициентах и свободном члене этого уравнения обычно заменяется приближенным выражением (4.18):

$$a_W = \frac{\lambda_{\text{эф},w}}{\Delta x^2} f(Pe_w) + \frac{c_w}{\Delta x} \max((\rho u)_w, 0)$$

$$a_E = \frac{\lambda_{\text{эф},e}}{\Delta x^2} f(Pe_e) + \frac{c_e}{\Delta x} \max(-(\rho u)_e, 0),$$

$$a_S = \frac{\lambda_{\text{эф},s}}{\Delta y^2} f(Pe_s) + \frac{c_s}{\Delta y} \max((\rho v)_s, 0),$$

$$a_N = \frac{\lambda_{\text{эф},n}}{\Delta y^2} f(Pe_n) + \frac{c_n}{\Delta y} \max(-(\rho v)_n, 0),$$

$$a_B = \frac{\lambda_{\text{эф},b}}{\Delta z^2} f(Pe_b) + \frac{c_b}{\Delta z} \max((\rho w)_b, 0)$$

$$a_T = \frac{\lambda_{\text{эф},t}}{\Delta z^2} f(Pe_t) + \frac{c_t}{\Delta z} \max(-(\rho w)_t, 0),$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 + (\rho c)_P^0 / \Delta \tau,$$

$$d_P = Q_{VP} + (\rho c)_P^0 T_P^0 / \Delta \tau.$$

В качестве граничных условий к дифференциальному уравнению (4.17) на входе задается, как правило, температура по-

ступающей жидкой или газообразной среды. Выходное сечение выбирается там, где скорость потока достаточно велика и направлена к выходу из расчетной области. В этом случае функция от числа Пекле (1.18) сводит к нулю коэффициент дискретного уравнения, связывающий температуру внутри и вне расчетной области, что равносильно заданию на выходной границе нулевой производной от температуры.

## § 8. Граничные условия на поверхности стен

Прежде всего, задается температура нагреваемой поверхности стен или она вычисляется, исходя из равенства потоков теплоты, подводимой к стенам из рабочего пространства технологической установки и отводимой через них в окружающую среду. На каждом участке границы рассчитывается конвективная теплоотдача к поверхности стен на основе закономерностей турбулентного пограничного слоя.

Одностороннюю производную от температуры на поверхности стенки можно определить с учетом приближенного подобия распределений температуры и скорости в пограничном слое, если применить понятие безразмерной температуры [29]:

$$T_+ \equiv \rho_{\text{СТ}} c_{\text{СТ}} u_* (t - t_{\text{СТ}}) / q_{\text{СТ}},$$

где  $\rho_{\text{СТ}}$ ,  $c_{\text{СТ}}$  – плотность и теплоемкость жидкости или газа при температуре стенки;  $u_*$  – динамическая скорость;  $t$  и  $t_{\text{СТ}}$  – температура среды соответственно вблизи стенки и на ее поверхности;  $q_{\text{СТ}}$  – плотность теплового потока на поверхности стенки.

На рис. 4.8 показаны в безразмерном виде результаты измерения температуры и скорости воздуха в турбулентном пограничном слое вблизи стенки [18]. Если значения безразмерной температуры, представленные экспериментальными точками вдоль кривой 1, поделить на число Прандтля воздуха, то распределения величин  $T_+ / Pr$  (кривая 3) и безразмерной скорости  $u_+$  (кривая 2) сближаются, а в области вязкого подслоя практиче-

ски совпадают. Следовательно, так же как производная от безразмерной скорости, производная от функции  $T_+ / Pr$  равна единице в начале координат и может использоваться для вычисления односторонней производной от температуры на поверхности стенки, исходя из соотношения целой величины и ее доли.

При тангенсе угла наклона касательной 4, равном единице, тангенс угла наклона хорды 5, равный соотношению  $T_+ / (y_+ Pr)$ , представляет собой долю дискретного значения односторонней производной от безразмерной температуры в полной величине производной. Это утверждение остается справедливым и для соответствующих размерных величин, применяемых при формулировке граничных условий – односторонней производной от температуры  $(\partial T / \partial y)_{ст}$  и ее дискретного аналога  $(T_P - T_{ст}) / y_P$ .

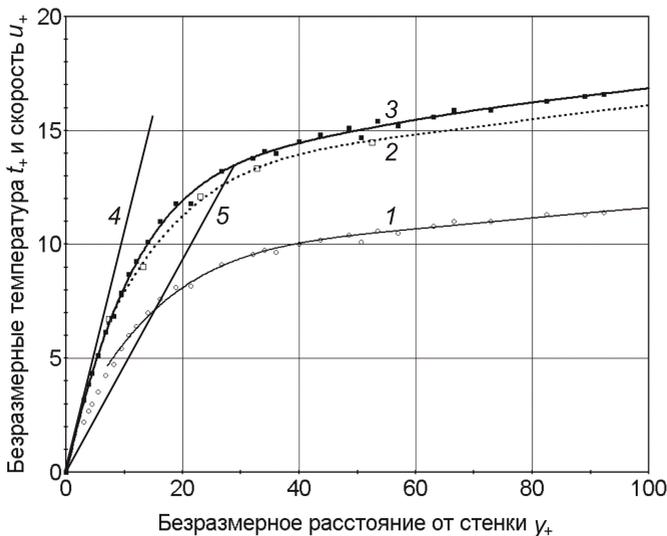


Рис. 4.8. Распределение безразмерной температуры и скорости воздуха вблизи стенки: точки – экспериментальные данные [18]; 1 – безразмерная температура  $T_+$ ; 2 – безразмерная скорость  $u_+$ ; 3 – приведенная температура  $T_+ / Pr$ ; 4 – касательная; 5 – хорда;

Следовательно, для нахождения на стенке односторонней производной от температуры достаточно поделить ее дискретное значение  $(T_P - T_{CT})/y_P$  на соотношение  $\text{Pr}^{-1}(T_+/y_+)_P$ , соответствующее приграничному узлу  $P$  сетки:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{CT} \approx \frac{T_P - T_{CT}}{y_P} \text{Pr} \left(\frac{y_+}{T_+}\right)_P = \frac{T_P - T_{CT}}{y_P} m_+^{(t)}, \quad (4.20)$$

где  $y_P$  – расстояние от стенки до ближайшего узла  $P$  сетки;  $m_+^{(t)}$  – поправочный множитель к дискретной производной от температуры на поверхности стенки:

$$m_+^{(t)} = \text{Pr}(y_+/T_+)_P. \quad (4.21)$$

Как показано в [10], при умеренных тепловых потоках допустимо постулировать приближенную пропорциональность между безразмерной температурой и безразмерной скоростью вблизи стенки:

$$T_+ \approx \text{Pr}_T u_+, \quad (4.22)$$

где  $\text{Pr}_T$  – турбулентное число Прандтля.

Это соотношение соответствует экспериментальным данным [18] на рис. 4.8. Кривая 1 построена как произведение (4.22) при  $\text{Pr}_T = 0,75$ . Она достаточно хорошо ложится на экспериментальные точки безразмерной температуры  $T_+$ , что в целом подтверждает справедливость приближенного соотношения (4.22), по крайней мере, за пределами вязкого подслоя.

Подставив соотношение (4.22) в формулу (4.21), установим приближенную пропорциональность друг другу поправочных множителей  $m_+^{(t)}$  и  $m_+^{(u)}$  к дискретным производным на поверхности стенки:

$$m_+^{(t)} = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \left(\frac{y_+}{u_+}\right)_P \approx \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} m_+^{(u)},$$

где  $m_+^{(u)}$  – поправочный множитель к дискретной производной от массовой скорости, определяемый по формуле (3.20).

Теперь выражение (4.20) для односторонней производной от температуры принимает вид, пригодный для постановки граничных условий к уравнениям конвективной теплоотдачи газообразной среды на поверхности стенки при расположении пристенного узла сетки за пределами вязкого подслоя:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{ст}} \approx \frac{T_P - T_{\text{ст}}}{y_P} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} m_+^{(u)}. \quad (4.23)$$

Применительно к жидкой среде требуется проверка и дополнительное обоснование расчетных формул.

### § 9. Теплоотдача в турбулентном пограничном слое

Плотность конвективного теплового потока от турбулентной среды к стенам установки можно определить, исходя из общепринятого допущения, что непосредственно на твердой поверхности конвекция отсутствует и перенос теплоты в тонком слое теплоносителя, прилегающем к стенам, осуществляется только теплопроводностью по закону Фурье,

$$q_{\text{ст}} = -\lambda_{\text{ст}} \left(\frac{dT}{dy}\right)_{\text{ст}} = -\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \frac{v_{\text{ст}}}{\text{Pr}} \left(\frac{dT}{dy}\right)_{\text{ст}}, \quad (4.24)$$

где индекс "ст" означает, что физические свойства теплоносителя определяются при температуре стенки.

Возрастание температуры теплоносителя по нормали к стенке мало влияет на величину массовой скорости ( $\rho u$ ) в пограничном слое вблизи обтекаемой поверхности, так как температурные изменения продольной скорости  $u$  и плотности  $\rho$  газа частично компенсируют друг друга. Поэтому в алгоритме конвективной теплоотдачи от газообразной среды к поверхности стенки целесообразно вычислять одностороннюю производную не от линейной, а от массовой скорости. Введем пропорциональную ей величину  $\zeta$ , имеющую размерность линейной скорости, которую можно назвать коэффициентом пристенного переноса:

$$\zeta \equiv \frac{v_{\text{ст}}}{(\rho u)_P - (\rho u)_{\text{ст}}} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right)_{\text{ст}} = \frac{\rho_{\text{ст}} u_*^2}{(\rho u)_P - (\rho u)_{\text{ст}}}, \quad (4.25)$$

где  $(\rho u)_P$  – массовая скорость в пристенном узле  $P$  сетки;  $(\rho u)_{\text{ст}}$  – массовая скорость среды на поверхности движущейся стенки.

Применив выражение (3.20), найдем дискретное представление коэффициента пристенного переноса:

$$\zeta = \frac{v_{\text{ст}}}{y_P} m_+^{(u)}. \quad (4.26)$$

Введем его в формулу (4.23), заменив в ней поправочный множитель  $m_+^{(u)}$  выражением, следующим из равенства (4.26):

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{\text{ст}} \approx \zeta \frac{T_P - T_{\text{ст}}}{v_{\text{ст}}} \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T}. \quad (4.27)$$

В итоге, после подстановки выражения (4.27) в формулу (4.24), дискретное уравнение для плотности конвективного теплового потока от турбулентной среды к стенам установки принимает сравнительно простой расчетный вид:

$$q_{\text{ст}} \approx \zeta \frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}}}{\text{Pr}_T} (T_P - T_{\text{ст}}), \quad (4.28)$$

Здесь тепловой поток считается положительным, если вектор его плотности направлен стенке. В высокотемпературных газах вместо температуры  $T$  в расчетную формулу вводится энтальпия среды в соответствии с ее определением (4.1).

Дискретный аналог коэффициента пристенного переноса  $\zeta$  вычисляется в каждой итерации по формуле (4.26), а по соотношению (4.25) может быть найдена динамическая скорость:

$$u_*^2 = \zeta [(\rho u)_P - (\rho u)_{\text{ст}}] / \rho_{\text{ст}}.$$

С ее помощью рассчитывается безразмерная координата  $y_+$  для пристенного узла  $P$  сетки, затем находится поправочный множитель  $m_+^{(u)}$ . По этим данным может быть вновь уточнена величина коэффициента пристенного переноса  $\zeta$ .

## § 10. Проверка адекватности конвективной модели

Установленные закономерности турбулентного и конвективного переноса в пограничном слое были применены к формулировке граничных условий при численном решении дифференциальных уравнений движения и конвективного теплообмена с использованием стандартной двухпараметрической диссипативной модели турбулентности. Для проверки их адекватности выполнено сопоставление расчетных результатов с экспериментальными данными [30] по охлаждению турбулентного потока воздуха в трубе диаметром 150 мм, длиной 4 м при температуре ее стенки 296 К.

Условия движения и охлаждения воздуха перед экспериментальной трубой в [30] строго не определены, но отмечается, что теплообмен в ней близок к стабилизированному состоянию, при котором, как известно, завершается формирование динамического и теплового пограничных слоев. В связи с этим в математической модели, для более полного соответствия условиям эксперимента, предусмотрен предвключенный двухметровый охлаждаемый участок трубы, по длине которого формируется пограничный слой в условиях нестабилизированного движения и теплообмена. Расчетная температура воздуха на входе в предвключенный участок принята равной 480 К, что при разных числах Рейнольдса создает диапазон температуры воздушного потока, близкой к ее значениям в эксперименте.

На рис. 4.9 точками представлены значения числа Нуссельта  $Nu_s$ , полученные в [30] при измерении плотности теплового потока от охлаждаемого воздуха к стенке на расстоянии 3,52 м от начала экспериментального участка трубы, в зависимости от числа Рейнольдса  $Re_s$  в этом поперечном сечении. Характерная особенность состоит в том, что для обработки экспериментальных данных в [30] применялись значения скорости  $u_s$  и температуры  $T_s$  потока воздуха на оси трубы, так что числа Рейнольдса и Нуссельта определялись, скорее всего, по таким формулам:

$$Re_э = u_э d / \nu_э, \quad Nu_э = \alpha_э d / \lambda_{ст},$$

где  $d$  – внутренний диаметр трубы;  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности при температуре стенки;  $\nu_э$  – кинематический коэффициент вязкости воздуха при температуре на оси трубы;  $\alpha_э$  – экспериментальный коэффициент теплоотдачи,

$$\alpha_э = q_{ст} / (T_э - T_{ст}).$$

Численное моделирование конвективной теплоотдачи [21] выполнено при шаге сетки по радиусу трубы, равном 1 мм. В формуле (4.28) принято расчетное значение турбулентного числа Прандтля  $Pr_T = 0,8$ . Результаты моделирования изображены на рис. 4.9 кривыми 1 – 3.

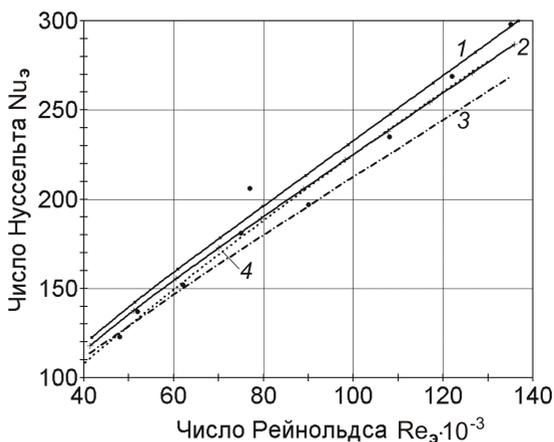


Рис. 4.9. Экспериментальные точки [30] и расчетные зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса: 1 – по формулам для развитой турбулентности; 2, 3 – по формулам для умеренной турбулентности; 4 – степенная зависимость; 1, 2 – с турбулентной вязкостью по (3.17); 3 – с турбулентной вязкостью по (3.21)

Прежде всего, отметим заметное различие расположения кривых 1 и 2, полученных при высокой и умеренной турбулентности в соответствии с распределениями безразмерной скоро-

сти 2 и 1 на рис. 3.4. Хотя обе кривые лежат в основном в пределах разброса экспериментальных точек (см. рис. 4.9), отсюда следует, что для повышения точности численного моделирования теплоотдачи от газового потока следует учитывать уровень его турбулентности.

В обоих случаях коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  вычислялся по выражению (3.21), в котором кинематический коэффициент вязкости  $\nu_P$  определен по локальной температуре воздуха в пристенном узле сетки. Расчет турбулентной вязкости по формуле (3.17) приводит к кривой 3, лежащей в основном за пределами разброса экспериментальных точек. Исключением служит лишь небольшая область при пониженных значениях числа Рейнольдса. Можно предположить, что в этой области, вследствие невысоких значений динамической скорости, пристенные узлы сетки оказываются вблизи или внутри вязкого подслоя, так что здесь корректировка формулы (3.17) при расчете турбулентной вязкости необходима в меньшей мере или вообще не требуется. Таким образом, подтверждается целесообразность в случае достаточно больших шагов сетки применять формулу (3.21), в которой кинематический коэффициент вязкости вычисляется по локальной температуре газов в пристенном узле  $P$  сетки.

Пунктирная кривая 4 на рис. 4.9 вычислена по формуле

$$Nu_9 = 0,0225 Re_9^{0,8},$$

удовлетворительно согласующейся с известными экспериментальными данными по конвективной теплоотдаче, представленными эмпирическим уравнением (4.5). Пунктирная линия хорошо совмещается с кривой 2 в области повышенных значений числа подобия Рейнольдса и плавно переходит в область кривой 3 при пониженных значениях этого числа, что в целом подтверждает достоверность математической модели конвективного теплопереноса в турбулентном пограничном слое.

## Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ В СЕЛЕКТИВНЫХ ГАЗАХ

### § 1. Основные понятия и определения

Твердые тела, жидкости и некоторые газы испускают энергию в виде электромагнитных волн. Совокупность распространяющихся электромагнитных волн, энергия и параметры которых зависят от температуры и оптических свойств излучающих тел, составляет тепловое излучение. Параметрами электромагнитных волн являются длина волны  $\lambda$  и частота  $\nu$ . Связь между ними определяется соотношением

$$\lambda \nu = c_0,$$

где  $c_0$  - скорость света.

Испускание и поглощение энергии телами происходит отдельными квантами, называемыми фотонами. Излучаемая энергия распространяется в виде электромагнитных лучей по всем направлениям трехмерного пространства. Направление луча  $l$  и элементарный телесный угол  $d\omega$  определяются через координатные углы сферической системы координат  $(R, \theta, \varphi)$ , которая может быть построена в каждой точке пространства в соответствии с ее изображением на рис. 4.6:

$$d\omega \equiv \frac{dF}{R^2} = \frac{R d\theta \cdot r d\varphi}{R^2} = \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (5.1)$$

где  $dF$  – элементарная площадка, выделенная на сферической поверхности радиуса  $R$ .

Интегрирование выражения (5.1) в трехмерном пространстве показывает, что полусферический телесный угол равен  $2\pi$  и, следовательно, полный сферический телесный угол равен  $4\pi$ .

Количество лучистой энергии  $\Delta Q_{\text{л}}$ , переносимой по всем направлениям в пределах полусферического телесного угла за интервал времени  $dt$  через произвольно расположенную элементарную площадку  $dF$ , приведенное к единице площади и единице

времени, образует поверхностную плотность потока излучения  $E$ , равную проекции вектора плотности полусферического потока излучения  $\mathbf{E}$  на нормаль к этой площадке:

$$E \equiv \frac{\Delta Q_n}{dF dt}.$$

Очевидно, что здесь числитель имеет второй порядок малости ( $\Delta Q_n \equiv d^2 Q_n$ ).

Энергию лучей, пересекающих элементарную площадку  $dF$  по направлению  $\mathbf{l}$  в пределах элементарного телесного угла  $d\omega$ , характеризуют интенсивностью излучения  $I_l$ . Её величину в расчёте на единицу площади, единицу времени и единицу телесного угла находят по формуле:

$$I_l \equiv \frac{d^3 Q_n}{(dF \cos\theta) dt d\omega} = \frac{dE}{\cos\theta d\omega},$$

где  $\theta$  – угол между направлением  $\mathbf{l}$  и нормалью к площадке  $dF$ .

Из этого равенства следует формула, позволяющая определять по интенсивности излучения  $I_l$  поверхностную плотность потока лучистой энергии  $E$  в пределах положительного полусферического телесного угла,

$$E_+ = \int_{(2\pi)} I_l \cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_l \cos\theta \sin\theta d\theta = -2\pi \int_0^{\pi/2} I_l \cos\theta d(\cos\theta), \quad (5.2)$$

и в противоположном отрицательном направлении,

$$E_- = \int_{(-2\pi)} I_l |\cos\theta| d\omega = -2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_l |\cos\theta| d(\cos\theta). \quad (5.3)$$

Плотность результирующего потока излучения вычисляется как разность плотностей полусферических потоков (5.2) и (5.3):

$$q_n = E_+ - E_- = \int_{(4\pi)} I_l \cos\theta d\omega. \quad (5.4)$$

В том случае, когда лучистая энергия испускается абсолютно черным телом с интенсивностью излучения  $I_0$  одинаковой по всем направлениям, интегрирование равенства (5.2) приведет к следующему выражению для плотности полусферического потока излучения:

$$E_0 = \pi I_0.$$

Сравнивая последнее соотношение с законом Стефана–Больцмана (4.7), получаем формулировку этого закона применительно к интенсивности излучения абсолютно черного тела:

$$I_0 = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (5.5)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана.

Объемную плотность лучистой энергии определяют, интегрируя по сферическому телесному углу интенсивность излучения и учитывая при этом скорость  $c_0$  распространения лучей:

$$U_n = \frac{1}{c_0} \int_{(4\pi)} I_l d\omega.$$

Так как величина объемной плотности лучистой энергии  $U_n$ , обратная скорости света, чрезвычайно мала, часто вместо нее используют понятие лучистой температуры  $T_n^4$  [27]:

$$T_n^4 \equiv \frac{1}{4\sigma} \int_{(4\pi)} I_l d\omega. \quad (5.6)$$

Аналогично термодинамической температуре  $T$ , определяющей интенсивность собственного излучения абсолютно черного тела по закону Стефана–Больцмана (5.5), лучистая температура  $T_n$  характеризует среднюю интенсивность энергии лучей, проходящих по разным направлениям через заданную точку пространства. В том случае, когда интенсивность излучения  $I_l$  постоянна по телесному углу и равна интенсивности излучения  $I_0$  абсолютно черного тела, лучистая температура  $T_n$  становится равной термодинамической температуре  $T$ .

## § 2. Закономерности равновесного излучения

Тепловое излучение в замкнутой изотермической системе тел, находящихся в термодинамически равновесном состоянии, называют равновесным. Равновесное излучение имеет ту же интенсивность  $I_0$  и такой же спектр, как и лучистая энергия, испускаемая абсолютно черным телом.

Распределение спектральной интенсивности равновесного излучения  $I_{0\nu}$  по частоте  $\nu$  описывается формулой Планка. При показателе преломления газообразной среды равном единице она имеет следующий вид:

$$I_{0\nu} = 2 \frac{\nu^2}{c_0^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (5.7)$$

где  $c_0$  – скорость света в вакууме;  $h$  – постоянная Планка;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – термодинамическая температура.

Кривые 1 – 3 на рис. 5.1 построены по формуле (5.7). Они показывают, что при повышении температуры излучающей среды интенсивность равновесного излучения значительно возрастает. При этом максимум спектральной интенсивности излучения смещается в сторону большей частоты и соответственно меньшей длины волны.

Интегрирование выражения (5.7) для спектральной интенсивности монохроматического излучения  $I_{0\nu}$  по всему диапазону частот спектра приводит к закону Стефана–Больцмана (5.5) для интегральной интенсивности излучения  $I_0$ :

$$I_0 = \int_0^{\infty} I_{0\nu} d\nu = 2 \frac{k^4}{c_0^2 h^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$$

где переменная интегрирования задана формулой

$$x = h\nu/kT.$$

Согласно закону Кирхгофа, в условиях теплового равновесия любое тело испускает столько же лучистой энергии, сколько

ее поглощает. При радиационном теплообмене, когда тепловое равновесие в целом нарушено, закон Кирхгофа справедлив лишь для монохроматического излучения в предположении, что в момент поглощения или испускания фотона молекулы находятся в состоянии локального термодинамического равновесия, соответствующего локальной температуре тела (гипотеза ЛТР).

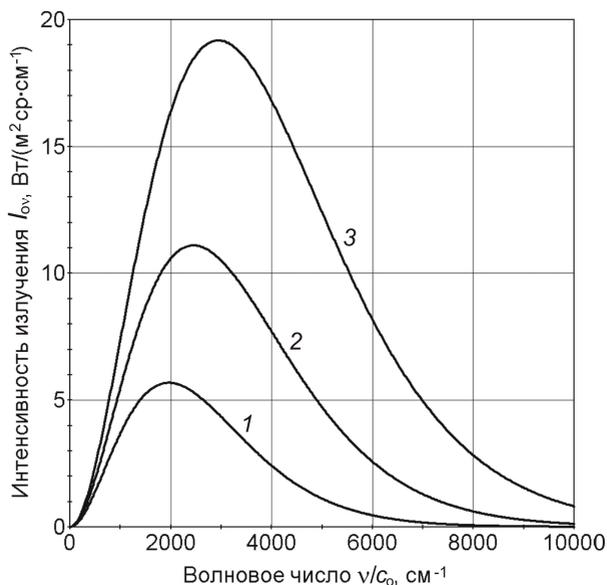


Рис. 5.1. Спектральная интенсивность равновесного излучения при температуре: 1 – 1000 К; 2 – 1250 К; 3 – 1500 К

Закономерности радиационного переноса теплоты в поглощающей среде определяются с помощью закона Бугера, согласно которому поглощение лучистой энергии на элементарном участке  $dl$  длины луча пропорционально локальной интенсивности излучения  $I_l$ :

$$dI_l/dl = -\alpha I_l, \quad (5.8)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поглощения среды, м<sup>-1</sup>.

Интегрируя это уравнение по длине луча при постоянном коэффициенте поглощения, получают закон Бугера в интегральной форме:

$$I_{\text{пр}} = I_{\text{н}} \exp(-\alpha l), \quad (5.9)$$

где  $I_{\text{н}}$  – интенсивность излучения в начале луча,  $I_{\text{пр}}$  – интенсивность пропущенного излучения на длине луча  $l$  (не поглощенная часть начальной энергии луча). Переменный коэффициент поглощения  $\alpha$  в формуле (5.9) усредняется по длине луча.

Интегральный закон Бугера (5.9) применяют для оценки поглощательной способности объема газообразной среды, полагая, что падающее на него излучение является равновесным:

$$A_{\text{г}} \equiv 1 - I_{\text{пр}}/I_{\text{о}} = 1 - \exp(-\alpha_{\text{г}} l_{\text{эф}}), \quad (5.10)$$

где  $I_{\text{пр}}$  – интенсивность пропущенного излучения на длине луча;  $l_{\text{эф}}$  – эффективная длина луча (или эффективная толщина излучающего слоя), равная радиусу полусферы, объемное излучение которой на центральную элементарную площадку такое же по величине, как излучение объема  $V_{\text{г}}$  изотермической среды,

$$l_{\text{эф}} \approx 3,6 V_{\text{г}}/F_{\text{ст}},$$

$F_{\text{ст}}$  – поверхность стен, ограждающих этот объем. Эффективная длина луча усредняет таким образом длины лучей с учетом их вклада в результирующее излучение объема газов.

Изотермическая среда излучает столько же лучистой энергии, сколько ее поглощает; в результате степень черноты  $\varepsilon_{\text{г}}$  объема изотермических газов равна его поглощательной способности  $A_{\text{г}}$ , рассчитанной по формуле (5.10) при равновесном падающем излучении.

### § 3. Идеализированные и селективные спектры

Поглощающая среда называется серой, если величина ее коэффициента поглощения постоянна по спектру. Применительно к серой среде появляется возможность значительно упро-

стить методы расчета радиационного переноса, так как ее коэффициент поглощения не зависит ни от спектрального состава лучистой энергии, ни от длины луча. Однако гипотеза серой среды не адекватна и не приемлема при математическом моделировании радиационного переноса теплоты в среде селективно поглощающих газов.

Другим примером идеализированного спектра может служить антисерый спектр [31]. Он состоит из полос поглощения, в которых падающая извне лучистая энергия поглощается полностью, и из "окон", в которых лучистая энергия проходит не поглощаясь. В соответствии с законом Кирхгофа, спектральная интенсивность излучения в полосах поглощения достигает своего предельного равновесного значения  $I_{ov}$ .

С теоретической точки зрения, антисерый спектр образуется при переносе в бесконечной изотермической поглощающей среде ее собственного излучения. В антисером спектре степень черноты  $\varepsilon_\infty$  и поглощательная способность  $A_\infty$  по отношению к равновесному излучению определяются по величине суммарной интенсивности  $I_l$  излучения бесконечной изотермической среды в полосах спектра:

$$A_\infty = \varepsilon_\infty \equiv I_l / I_o = \int_0^\infty I_{lv} dv / \int_0^\infty I_{ov} dv, \quad (5.11)$$

где  $I_{lv}$ ,  $I_{ov}$  – интенсивности монохроматического излучения соответственно в полосах поглощения антисерого и равновесного спектра.

Таким образом, поглощательная способность  $A_\infty$  антисерого спектра может рассматриваться как энергетическая доля всех его полос поглощения в спектре равновесного излучения, а его пропускательная способность  $D_\infty = (1 - A_\infty)$  как энергетическая доля в равновесном спектре, не занятая полосами поглощения.

Спектры реальных газов, участвующих в радиационном теплообмене, также состоят из полос поглощения и окон между

ними. Полосы образуются множеством спектральных линий, так что в результате лучистая энергия поглощается газами при переменном по спектру коэффициенте поглощения селективно, то есть избирательно, причем селективные свойства проявляются даже в узком интервале частот, разделяющем соседние спектральные линии.

Если в слой селективных газов поступает лучистая энергия равновесного спектрального состава, то ее поглощение в первый момент происходит с максимальным для данного газа коэффициентом  $\alpha_n$ , который называют средним (по спектру) планковским коэффициентом поглощения. По мере продвижения лучей в среде селективных газов в их спектре возрастает доля плохо поглощаемой энергии, лучистая энергия в целом поглощается менее интенсивно и отношение коэффициента поглощения газов  $\alpha_r$  к среднему планковскому коэффициенту  $\alpha_n$  оказывается всегда меньше единицы (или в пределе равно ей):

$$\alpha_r / \alpha_n \leq 1. \quad (5.12)$$

В качестве примера на рис. 5.2 приведено сглаженное распределение по спектру интенсивности излучения изотермического объема водяного пара при температуре 1500 К для двух длин луча  $l_{\text{эф}} = 0,1$  и  $1,0$  м, рассчитанное по экспериментальным данным [32]. Пунктирные кривые 1 и 2 на рисунке показывают, что излучение и поглощение лучистой энергии сосредоточено в основном в полосах спектра, образованных группами спектральных линий.

Так как в большинстве спектральных линий в полосах поглощения на рис. 5.2 интенсивность собственного излучения водяного пара не достигает равновесной кривой 3, то, в соответствии с законом Кирхгофа, лучистая энергия, падающая извне на объем водяного пара поглощается им лишь частично. Необходимость учета взаимосвязи между собственным, поглощаемым и пропускаемым излучениями в каждой линии спектра приводит к

чрезмерному усложнению методов математического моделирования радиационного переноса в среде селективных газов.

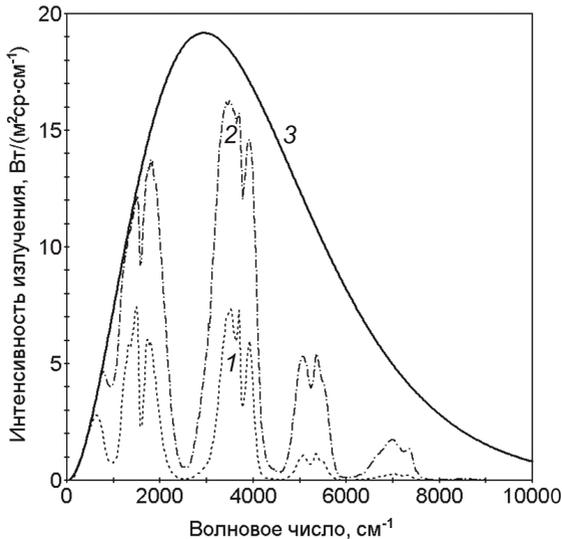


Рис. 5.2. Распределение по спектру интенсивности излучения водяного пара при температуре 1500 К и атмосферном давлении для двух длин луча: 1 – 0,1 м; 2 – 1 м; 3 – равновесное излучение при той же температуре

В этих условиях полезно рассмотреть возможность использования расчетных преимуществ антисерого спектра, полагая, что каждой реальной поглощающей среде можно поставить в соответствие эквивалентный антисерый спектр гипотетической бесконечной среды, в полосах поглощения которого переносится только поглощаемая часть лучистой энергии, а все пропускаемое реальной средой излучение сосредоточено в "окнах" эквивалентного спектра. Главное отличие эквивалентного антисерого спектра от селективного состоит в том, что в нем выделены разные диапазоны частот для поглощаемой и пропускаемой лучистой энергии.

Антисерый спектр, эквивалентный спектру водяного пара при длине луча  $l = 1$  м, схематично представлен на рис. 5.3. Он

состоит из полос поглощения 1, суммарная площадь которых, отнесенная к общей площади под планковской кривой 3, равна поглотительной способности  $A_\infty$  гипотетической неограниченной среды. Пропускательная способность  $(1 - A_\infty)$  эквивалентного антисерого спектра может рассматриваться как доля суммарной площади "окон" 2 в общей площади под планковской кривой 3 на рис. 5.3.

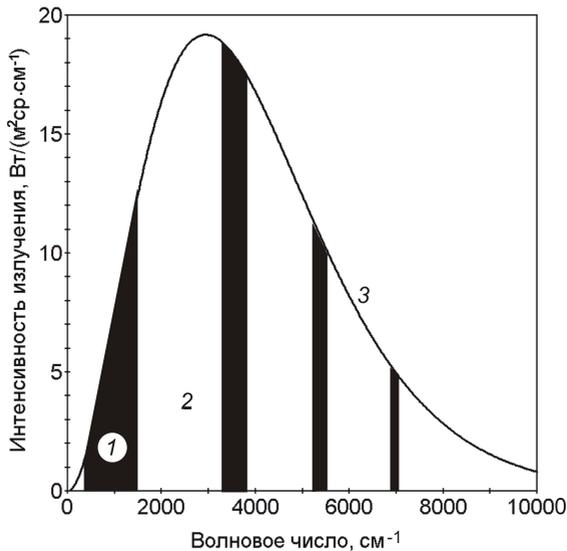


Рис. 5.3. Модель излучения водяного пара в антисером спектре: 1 – полосы поглощения; 2 – окна спектра; 3 – равновесное излучение

Условием расчетной эквивалентности гипотетического антисерого спектра и селективного спектра, представляющего радиационные свойства ограниченного объема изотермической среды, является равенство в них поглощаемой лучистой энергии. Оно выражается, прежде всего, в равенстве поглотительных способностей этих спектров:

$$A_\infty = A_r \equiv 1 - \exp(-\alpha_r I_{\text{эф}}), \quad (5.13)$$

где  $A_r$  – поглощательная способность объема газов, рассчитанная по формуле (5.10);  $\alpha_r$  – интегральный (средний по спектру и длине луча) коэффициент поглощения газов;  $l_{эф}$  – эффективная толщина излучающего слоя.

Реальная газообразная среда в теплотехнологических установках состоит, как правило, из смеси водяного пара и углекислого газа, разбавленных азотом и избыточным воздухом. Средний планковский коэффициент  $\alpha_n$  смеси трехатомных газов может быть найден сложением средних планковских коэффициентов водяного пара  $k_{H_2O}$  и углекислого газа  $k_{CO_2}$  после умножения последних на объемные доли  $\rho_{H_2O}$  и  $\rho_{CO_2}$ , занимаемые этими компонентами в газовой смеси:

$$\alpha_n = k_{H_2O}\rho_{H_2O} + k_{CO_2}\rho_{CO_2}.$$

Поглощательную способность  $A_r$  смеси углекислого газа и водяного пара также вычисляют суммированием поглощательных способностей компонентов  $A_{CO_2}$  и  $A_{H_2O}$ . Одновременно для учета взаимного поглощения компонентами лучистой энергии из этой суммы вычитается их произведение:

$$A_r \approx A_{CO_2} + A_{H_2O} - A_{CO_2}A_{H_2O}.$$

Использование коэффициентов поглощения для характеристики радиационных свойств смеси трехатомных газов имеет некоторые преимущества. Можно показать, что простое сложение коэффициентов поглощения при вычислении поглощательной способности смеси газов по экспоненциальной формуле (5.10) уже учитывает поправку на взаимное поглощение лучистой энергии трехатомными газами:

$$A_r = [1 - \exp(-\alpha_{H_2O} l_m)] + [1 - \exp(-\alpha_{CO_2} l_m)] - [1 - \exp(-\alpha_{H_2O} l_m)][1 - \exp(-\alpha_{CO_2} l_m)] = 1 - \exp[-(\alpha_{H_2O} + \alpha_{CO_2})l_m].$$

Действительно, правая часть этого равенства такой поправки в явном виде не содержит.

#### § 4. Коэффициенты поглощения водяного пара

Поглощение равновесной лучистой энергии водяным паром и углекислым газом изучалось во многих экспериментально-теоретических работах, результаты которых обобщены в справочнике [32]. Для водяного пара выполнены измерения спектральных планковских коэффициентов поглощения  $k_i$  в  $i$ -х узких частях спектра. По их значениям определяются "сглаженные" спектральные коэффициенты поглощения  $\alpha_i$  водяного пара [33]:

$$\alpha_i = \frac{k_i p_{\text{газ}} \cdot 273 / T}{\sqrt{1 + k_i p_{\text{газ}} \cdot 273 / T / (4 b_i / d_i)}}, \quad (5.14)$$

где  $k_i$  – спектральный планковский коэффициент поглощения;  $p_{\text{газ}}$  – парциальное давление трехатомного газа (в долях от полного давления);  $T$  – термодинамическая температура;  $l$  – длина луча;  $b_i$  – средняя полуширина спектральных линий;  $d_i$  – среднее расстояние между линиями в узком  $i$ -м участке спектра.

Таким образом, согласно методике [33], чтобы найти средние по спектру коэффициенты поглощения водяного пара  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$ , требуется по имеющимся экспериментальным данным рассчитать спектральные коэффициенты поглощения  $\alpha_i$  во многих частях спектра для нескольких значений температуры газов, затем выполнить усреднение этих коэффициентов по спектру и интерполяцию по температурным диапазонам.

Избежать такого рода трудоемких математических операций при численном моделировании становится возможным, если для нахождения средних коэффициентов поглощения водяного пара  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  использовать структуру формулы (5.14), введя в нее, вместо спектрального коэффициента  $k_i$ , средний по спектру планковский коэффициент поглощения  $k_{\text{H}_2\text{O}}$  и безразмерный поправочный множитель  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  [34]:

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{k_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot m_{\text{H}_2\text{O}}}{\sqrt{1 + k_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l / (4 b / d)}}, \quad (5.15)$$

где  $b$  – параметр, заменяющий в формуле полуширину спектральных линий,  $\text{см}^{-1}$  (в единицах волновых чисел):

$$b = 0,09\sqrt{273/T} \left[ 1 + 4\rho_{\text{H}_2\text{O}} \sqrt{273/T} / (1 + \sqrt{\rho_{\text{H}_2\text{O}} l}) \right]. \quad (5.16)$$

Эмпирические уравнения [33] для среднего расстояния  $d_i$ ,  $\text{см}^{-1}$ , между линиями спектра сведены к расчетной зависимости

$$d = \exp(4,5 - 4,6\theta + 0,6\theta^2),$$

в которой для сокращения записи применено обозначение  $\theta = 0,001T$ .

Усреднение значений  $k_i$  по спектру привело к простой формуле, рекомендованной в [34] для вычисления среднего планковского коэффициента поглощения водяного пара  $k_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $\text{м}^{-1}$ :

$$k_{\text{H}_2\text{O}} = 0,52 - 0,22\theta + 5\theta^{-2}.$$

Значения поправочного множителя  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  аппроксимированы в [34] логарифмическими полиномами для шести дискретных значений температуры ( $T = 600, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000$  К) на основе экспериментальных данных [32] при изменении приведенной длины луча в интервале  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} l = 0,001 \dots 4$  м:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = c_0 + c_1 \ln(\rho_{\text{H}_2\text{O}} l) + c_2 \ln^2(\rho_{\text{H}_2\text{O}} l) + c_3 \ln^3(\rho_{\text{H}_2\text{O}} l) + c_4 \ln^4(\rho_{\text{H}_2\text{O}} l) + c_5 \ln^5(\rho_{\text{H}_2\text{O}} l). \quad (5.17)$$

Следующим этапом стала интерполяция коэффициентов  $c_i$  логарифмического полинома (5.17) по параметру  $\theta = 0,001T$  [35]:

$$c_i = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + a_5\theta^5, \quad (5.18)$$

где  $a_0 \dots a_5$  – коэффициенты полинома, приведенные в табл. 5.1.

Температурный диапазон  $T = 600 \dots 3000$  К при интерполяции был разделен на две части. При температуре газов  $600 \dots 1500$  К коэффициенты  $c_0 \dots c_5$  интерполированы полиномами четвертой и пятой степени, а при  $1500 \dots 3000$  К – полиномами третьей степени.

Таблица 5.1

Коэффициенты для вычисления  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  при  $p_{\text{H}_2\text{O}}l = 0,001 \dots 4$  м

T = 600...1500 K						
	C <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	c <sub>5</sub>
a <sub>0</sub>	-0,22	-0,174	0	0,0355	0,02864	0,0019154
a <sub>1</sub>	3,12	0,037	0,07	-0,1975	-0,16327	-0,01121
a <sub>2</sub>	-3,8405	0,196	-0,254	0,4379	0,3459	0,023653
a <sub>3</sub>	1,799	-0,1397	0,2424	-0,4511	-0,339	-0,022727
a <sub>4</sub>	-0,2913	0,021	-0,0676	0,21135	0,15535	0,01015
a <sub>5</sub>	0	0	0	-0,03644	-0,02707	-0,001722
T = 1500...3000 K						
	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	c <sub>5</sub>
a <sub>0</sub>	1,378	-0,129	-0,20835	-0,039	0,004	0,000733
a <sub>1</sub>	-1,2045	0,2015	0,2856	0,03485	-0,008856	-0,001166
a <sub>2</sub>	0,4465	-0,124	-0,1151	-0,00886	0,00461	0,00053
a <sub>3</sub>	-0,0471	0,01813	0,01447	0,000733	-0,000678	-0,0000736

При малой длине луча поправочный множитель  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  близок к единице, а коэффициент поглощения  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  практически совпадает со средним планковским коэффициентом  $k_{\text{H}_2\text{O}}$ . По мере удлинения луча множитель  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  уменьшается и становится много меньше единицы, а коэффициент поглощения  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  заметно меньше планковского.

При объемной доле  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  в газовой смеси менее 0,3 полуэмпирический параметр  $b$ , вычисляемый по формуле (5.16), позволяет учитывать прямое влияние парциального давления водяного пара на радиационные характеристики  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  и  $A_{\text{H}_2\text{O}}$ .

Рис. 5.4 показывает, например, что рассчитанные значения поглотительной способности объема изотермических газов, содержащих 20 % водяного пара в смеси с азотом, удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными [32], обработанными по методике [33].

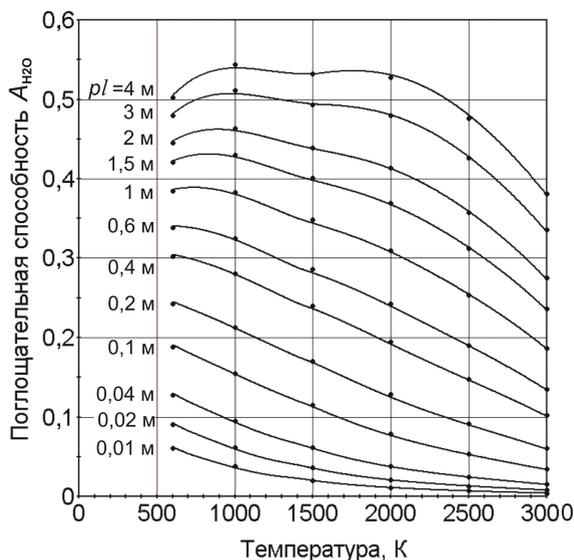


Рис. 5.4. Поглотительная способность водяного пара при его объемной доле в газах  $\rho_{H_2O} = 0,2$  и приведенной длине луча  $\rho_{H_2O} l$ : точки по методике [33]; линии по формулам (5.15) – (5.18)

Погрешность вычисления поглотительной способности  $A_{H_2O}$  изотермических слоев водяного пара разной оптической толщины при аппроксимации экспериментальных данных логарифмическим полиномом (5.17) для дискретных значений температуры составила менее 1 % [34]. После интерполяции в [35] коэффициентов логарифмического полинома по двум температурным диапазонам, погрешность возросла, но она, как правило, не превышает 2...3 %, что допустимо в инженерных расчетах радиационного теплообмена.

## § 5. Коэффициенты поглощения углекислого газа

Применительно к углекислому газу способ вычисления средних по спектру коэффициентов поглощения несколько изменен. В основу аппроксимации полиномами положена номограмма Эдуардса [36], а расчетной формуле придан следующий вид [35]:

$$\alpha_{\text{CO}_2} = k_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2} / \sqrt{1 + k_{\text{CO}_2} \rho_{\text{CO}_2} l m_{\text{CO}_2}}, \quad (5.19)$$

где  $k_{\text{CO}_2}$  – средний по спектру планковский коэффициент поглощения углекислого газа,  $\text{м}^{-1}$ ,

$$k_{\text{CO}_2} = -34,1 + 336,6 \theta - 568,85 \theta^2 + 428,46 \theta^3 - \\ - 167,647 \theta^4 + 33,34 \theta^5 - 2,6685 \theta^6;$$

$\rho_{\text{CO}_2}$  – объемная доля углекислого газа в смеси газов, численно равная его парциальному давлению;  $l_{\text{эф}}$  – эффективная толщина излучающего слоя, м;  $m_{\text{CO}_2}$  – безразмерный поправочный множитель, величина которого определяется по логарифмическому полиному, аналогичному (5.17):

$$m_{\text{CO}_2} = c_0 + c_1 \ln(\rho_{\text{CO}_2} l) + c_2 \ln^2(\rho_{\text{CO}_2} l) + c_3 \ln^3(\rho_{\text{CO}_2} l) + c_4 \ln^4(\rho_{\text{CO}_2} l).$$

Коэффициенты  $c_0 \dots c_4$  логарифмического полинома вычисляются по интерполяционному полиному четвертой степени в зависимости от термодинамической температуры для нескольких интервалов изменения приведенной длины луча  $\rho_{\text{CO}_2} l$ :

$$c_i = a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3 + a_4 \theta^4, \quad (5.20)$$

Значения коэффициентов  $a_0 \dots a_4$  интерполяционного полинома (5.20) для основного интервала длины луча  $\rho_{\text{CO}_2} l = 0,007 \dots 1$  м представлены в табл. 5.2.

В основном интервале изменения приведенной длины луча погрешность аппроксимации, как правило, составляет менее 2...3 %. За его пределами точность определения радиационных характеристик углекислого газа снижается, но при необходимо-

сти может быть улучшена дополнительной аппроксимацией в более узком интервале изменения приведенной длины луча.

Например, аппроксимирующий логарифмический полином в интервале приведенной длины луча  $\rho_{\text{CO}_2}l = 1 \dots 4$  м превращается в многочлен второй степени, коэффициенты которого вычисляются с помощью интерполяционного полинома (5.20) при значениях коэффициентов  $a_0 \dots a_4$ , представленных в табл. 5.3.

Таблица 5.2

Коэффициенты для вычисления  $\alpha_{\text{CO}_2}$  при  $\rho_{\text{CO}_2}l = 0,007 \dots 1$  м

T = 600...1500 K					
	C <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>
a <sub>0</sub>	4735	2624	601	48,1	-0,111
a <sub>1</sub>	-11450	-6325	-1358	-68,1	6,28
a <sub>2</sub>	11730	6325	1252	20,4	-12,1
a <sub>3</sub>	-5472	-2866	-520	9,922	7,77
a <sub>4</sub>	955	485	81,1	-4,322	-1,63
T = 1500...3000 K					
	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>
a <sub>0</sub>	1935	393	-90	17,8	5,75
a <sub>1</sub>	-2635	-56	362	-27,6	-13
a <sub>2</sub>	1590	-210	-334,5	18,95	10,5
a <sub>3</sub>	-437	120,2	123,4	-5,41	-3,547
a <sub>4</sub>	45,5	-18,3	-15,89	0,534	0,4244

Таблица 5.3

Коэффициенты  $a_i$  для вычисления  $\alpha_{\text{CO}_2}$  при  $p_{\text{CO}_2}l = 1 \dots 4$  м

	$T = 600 \dots 1500$ К			$T = 1500 \dots 3000$ К		
	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
$a_0$	5617	7732	-1540	715,9	-186,9	489,1
$a_1$	-15300	-25037	6193	-415,5	445,5	-464,4
$a_2$	17807	30889	-7680	117,2	-217,9	157,3
$a_3$	-9591	-16841	3945	-11,24	33,9	-19,22
$a_4$	1966,5	3411	-731,4	0	0	0

Рис. 5.5 свидетельствует об удовлетворительном совпадении результатов расчета по формулам (5.19) – (5.20) с данными номограммы Эдуардса [36].

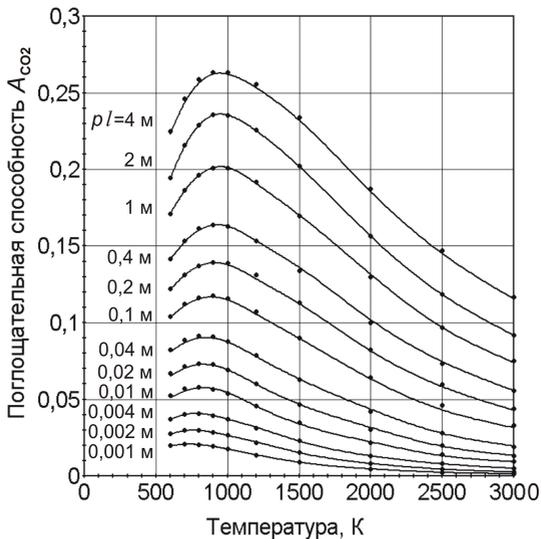


Рис. 5.5. Поглощательная способность углекислого газа в зависимости от температуры и приведенной длины луча  $p_{\text{CO}_2}l$ : точки по номограмме [36], линии по формуле (5.19)

Прямое влияние парциального давления  $p_{\text{CO}_2}$  углекислого газа на полуширину спектральных линий и, в результате, на коэффициент поглощения  $\alpha_{\text{CO}_2}$  проявляется слабо и в расчетных формулах обычно не учитывается.

## § 6. Уравнения радиационного переноса энергии

Природный газ и продукты его горения не содержат взвешенных в них твердых частиц, рассеивающих лучи. Они образуют поглощающую газообразную среду, которая способна, конечно, не только поглощать, но и излучать энергию.

В основе разных математических моделей теплообмена излучением в поглощающей среде лежит дифференциальное уравнение радиационного переноса теплоты по длине луча [27]:

$$\frac{\partial I_{\nu}}{\partial l} = \alpha_{\nu} I_{\text{ov}} - \alpha_{\nu} I_{\nu}, \quad (5.21)$$

где  $I_{\text{ov}}$  – спектральная интенсивность равновесного излучения;  $I_{\nu}$  – интенсивность монохроматического излучения по направлению  $l$ ;  $\nu$  – частота электромагнитного излучения.

После интегрирования этого уравнения по всему диапазону частот спектра оно преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial I_l}{\partial l} = \alpha_{\text{п}} I_{\text{o}} - \alpha I_l, \quad (5.22)$$

где  $I_{\text{o}}$ ,  $I_l$  – интегральные интенсивности соответственно равновесного излучения и энергии луча;  $\alpha_{\text{п}}$ ,  $\alpha$  – средние по спектру планковский и локальный коэффициенты поглощения среды.

Хотя дифференциальные уравнения переноса теплоты в поглощающей среде имеют сравнительно простой вид, все же при численном моделировании радиационного переноса возникают значительные трудности из-за необходимости учитывать особенности селективного поглощения лучистой энергии трехатомными газами – водяным паром и углекислым газом.

Лучи электромагнитной энергии проходят через каждую точку пространства по всем направлениям сферического телесного угла  $\omega = 4\pi$ . В сферической системе координат телесный угол  $\omega$  определяется с помощью плоского полярного угла  $\theta$  и азимутального угла  $\varphi$  в соответствии с равенством (5.1), а плотность результирующего потока излучения  $q_n$  связана с интенсивностью излучения  $I_l$  интегральным выражением (5.4).

Если принять, что ось  $y$  совпадает с направлением вектора плотности результирующего потока излучения  $\mathbf{q}_n$ , то соотношение расстояний по направлению  $l$  и по оси  $y$  будет представлено следующим равенством:

$$dl = dy / \cos\theta. \quad (5.23)$$

Соотношение (5.23) позволяет применять в дальнейшем упрощенный одномерный подход к изложению пространственных преобразований, что не нарушает, однако, общности получаемых результатов.

Интегрирование обеих частей уравнения (5.22) по сферическому телесному углу  $\omega = 4\pi$  с учетом закона Стефана-Больцмана (5.5) приводит к дифференциальному уравнению сохранения лучистой энергии:

$$\operatorname{div}\mathbf{q}_n = 4\sigma(\alpha_n T^4 - \alpha T_n^4), \quad (5.24)$$

где  $T_n$  – лучистая температура, определяемая формулой (5.6);  $\alpha$  – локальный коэффициент поглощения, усредненный по спектру и телесному углу;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана.

Чтобы перейти от уравнения сохранения (5.24) к дифференциальному уравнению радиационного переноса теплоты в математической модели теплообмена, требуется найти зависимость вектора плотности результирующего потока излучения  $\mathbf{q}_n$  от термодинамической  $T$  или лучистой  $T_n$  температуры.

Астрофизик Росселанд выразил в явном виде интенсивность монохроматического излучения  $I_{\nu}$  из уравнения (5.21):

$$I_{lv} \approx I_{ov} - \frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial I_{lv}}{\partial l}.$$

После подстановки этого выражения в формулу (5.4) для плотности результирующего потока излучения им выполнено ее приближенное интегрирование по телесному углу применительно к неограниченной поглощающей среде фотосферы звезд [37]. При интегрировании интенсивность излучения  $I_{lv}$  была представлена в форме симметричного тензора и вынесена за знак интеграла, антисимметричная часть тензора отброшена.

После перехода к интегральным по спектру величинам было получено искомое выражение для вектора плотности результирующего потока излучения в виде градиентной зависимости:

$$\mathbf{q}_n \approx -\frac{c_n}{3\alpha_R} \text{grad} U_n = -\frac{4\sigma}{3\alpha_R} \text{grad} T_n^4, \quad (5.25)$$

где  $U_n$  – объемная плотность лучистой энергии;  $T_n$  – лучистая температура;  $\alpha_R$  – средний по Росселанду интегральный коэффициент поглощения, определяемый путем взвешенного усреднения по спектру величин, обратных значениям спектральных коэффициентов поглощения.

Подставляя градиентную зависимость (5.25) в уравнение сохранения лучистой энергии (5.24), получают дифференциальное уравнение радиационного переноса теплоты, лежащее в основе метода диффузионного приближения [38]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_n^4}{\alpha_R \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_n^4}{\alpha_R \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_n^4}{\alpha_R \partial z} \right) + 3(\alpha_n T^4 - \alpha T_n^4) = 0. \quad (5.26)$$

Дифференциальное уравнение радиационного переноса в методе диффузионного приближения дает принципиальную возможность вычислять лучистую температуру  $T_n^4$ , значения которой используются затем при нахождении термодинамической температуры  $T$  газообразной среды. К сожалению, этот от-

носителем простой расчетный метод способен приводить к значительным непрогнозируемым погрешностям. Помимо приближенного характера градиентной формулы (5.25), погрешности возникают вследствие ряда других причин.

Во-первых, метод диффузионного приближения не учитывает, что длина лучей в промышленных установках не одинакова для разных направлений и, следовательно, распределение интенсивности излучения  $I_l$  по телесному углу отличается от принятого в [37]. Это отличие возрастает по мере приближения к стенам, в результате чего расчетная формула (5.25) дает неверную величину плотности результирующего потока излучения на поверхности стен, ограждающих объем поглощающей среды. Кроме того, метод диффузионного приближения обычно применяют к потоку лучистой энергии не только в полосах поглощения, но и в "окнах" спектра, где ее распределение по телесному углу отличается от диффузионного. В этом случае погрешность расчетных формул проявляется по всей толщине слоя селективных газов.

Во-вторых, проблемным вопросом является определение средних по Росселанду интегральных коэффициентов поглощения  $\alpha_R$  для селективной поглощающей среды, так же как и локального коэффициента поглощения  $\alpha$ . Замена их без достаточного обоснования коэффициентами поглощения  $\alpha_r$  трехатомных газов в инженерных расчетах не допустима.

В-третьих, в рамках метода диффузионного приближения не удастся сформулировать достаточно точные граничные условия к дифференциальному уравнению радиационного переноса (5.26) из-за отсутствия адекватной формулы для расчета плотности результирующего потока излучения  $q_{л.ст}$  на поверхности ограждающих стен. Это обстоятельство в основном и обуславливает непредсказуемость расчетных погрешностей при численной реализации математических моделей методом диффузионного приближения.

С теоретической точки зрения, более точными являются приближения метода сферических гармоник. Оптимальным считается приближение  $P_3$  этого метода, в котором решается система из трех взаимосвязанных дифференциальных уравнений. Однако, из-за трудностей с формулировкой граничных условий [39] обычно ограничиваются приближением  $P_1$  метода сферических гармоник, которое по своей сути ничем не отличается от изложенного выше метода диффузионного приближения.

Таким образом, для достижения адекватных результатов численного моделирования необходимо устранить или, по крайней мере, ослабить источники погрешностей метода диффузионного приближения. Возможности усовершенствования дифференциальной модели радиационного переноса теплоты [40] рассматриваются далее.

### § 7. Радиационный перенос в неограниченной среде

Понятие гипотетической неограниченной среды позволяет выполнить более строгое математическое обоснование расчетных уравнений радиационного переноса теплоты.

Предположим, что в неограниченной поглощающей среде отсутствуют сосредоточенные источники теплоты, так что температурное поле и интенсивность излучения можно представить с помощью непрерывных гладких функций, допускающих многократное дифференцирование. В этом случае при условии постоянства коэффициентов поглощения становится справедливой бесконечная последовательность математических равенств:

$$I_l = \frac{\alpha_n}{\alpha} I_o - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_l}{\partial l}, \quad \frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_l}{\partial l} = \frac{\alpha_n}{\alpha^2} \frac{\partial I_o}{\partial l} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 I_l}{\partial l^2},$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 I_l}{\partial l^2} = \frac{\alpha_n}{\alpha^3} \frac{\partial^2 I_o}{\partial l^2} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{\partial^3 I_l}{\partial l^3},$$

и так далее.

Если выражения, полученные здесь для первой и старших производных от интенсивности излучения  $I_l$ , ввести в правую часть каждого предыдущего равенства, то в итоге интенсивность излучения гипотетической неограниченной среды может быть представлена в форме ряда [41]:

$$I_l = \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( I_o - \frac{\partial I_o}{\alpha \partial l} + \frac{\partial^2 I_o}{\alpha^2 \partial l^2} - \frac{\partial^3 I_o}{\alpha^3 \partial l^3} + \frac{\partial^4 I_o}{\alpha^4 \partial l^4} - \frac{\partial^5 I_o}{\alpha^5 \partial l^5} + \dots \right). \quad (5.27)$$

По своему физическому смыслу ряд (5.27) является сходящимся (если  $\alpha > 0$  и величина производных ограничена), что можно доказать методом индукции или сопоставлением его с рядом Тейлора. Следовательно, над этим рядом можно производить математические операции.

Правая часть равенства (5.27) содержит интенсивность  $I_o$  равновесного излучения, величина которой определяется законом Стефана–Больцмана (5.5) и одинакова для всех направлений лучей, что делает возможным почленное интегрирование ряда по телесному углу. Заменим в (5.27) расстояние по длине луча  $l$  координатой  $y$  в соответствие с равенством (5.23):

$$I_l = \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( I_o - \frac{\partial I_o}{\alpha \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 I_o}{\alpha^2 \partial y^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^3 I_o}{\alpha^3 \partial y^3} \cos^3 \theta + \frac{\partial^4 I_o}{\alpha^4 \partial y^4} \cos^4 \theta - \dots \right).$$

Подстановка этого выражения в формулы (5.4) и (5.6) и последующее интегрирование их по сферическому телесному углу  $\omega = 4\pi$  приводит к представлению плотности результирующего потока излучения  $q_n^\infty$  и лучистой температуры  $T_n^4$  в неограниченной поглощающей среде также в форме ряда:

$$q_n^\infty = -4\sigma \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( \frac{\partial T^4}{3\alpha \partial y} + \frac{\partial^3 T^4}{5\alpha^3 \partial y^3} + \frac{\partial^5 T^4}{7\alpha^5 \partial y^5} + \frac{\partial^7 T^4}{9\alpha^7 \partial y^7} + \dots \right), \quad (5.28)$$

$$T_n^4 = \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( T^4 + \frac{\partial^2 T^4}{3\alpha^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 T^4}{5\alpha^4 \partial y^4} + \frac{\partial^6 T^4}{7\alpha^6 \partial y^6} + \frac{\partial^8 T^4}{9\alpha^8 \partial y^8} + \dots \right). \quad (5.29)$$

Здесь применен закон Стефана–Больцмана (5.5) для перехода от интенсивности равновесного излучения  $I_0$  к термодинамической температуре  $T^4$ .

Разложения в ряд (5.28) и (5.29) удовлетворяют уравнению сохранения лучистой энергии (5.24) и, таким образом, являются точной дифференциальной формой выражений для плотности результирующего потока излучения и лучистой температуры в неограниченной поглощающей среде в рамках принятого допущения о постоянстве коэффициентов поглощения. Члены ряда с производными высших порядков прогнозируют изменение температурного поля при удалении от расчетной точки и, следовательно, учитывают излучение, поступающее из отдаленных областей среды.

## § 8. Расчетные уравнения радиационного переноса

Дифференцирование членов ряда (5.29) по координате  $y$  дает возможность установить связь между первыми производными термодинамической и лучистой температуры в неограниченной среде в виде следующего равенства:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} \frac{\partial T^4}{3\alpha \partial y} = \frac{\partial T_n^4}{3\alpha \partial y} - \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( \frac{\partial^3 T^4}{9\alpha^3 \partial y^3} + \frac{\partial^5 T^4}{15\alpha^5 \partial y^5} + \frac{\partial^7 T^4}{21\alpha^7 \partial y^7} + \frac{\partial^9 T^4}{27\alpha^9 \partial y^9} + \dots \right).$$

Его подстановка в разложение (5.28) показывает, что на величину результирующего потока излучения в неограниченной поглощающей среде влияет распределение не только лучистой, но и термодинамической температуры:

$$q_n^\infty = -4\sigma \left[ \frac{\partial T_n^4}{3\alpha \partial y} + \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( \frac{4}{45\alpha^3} \frac{\partial^3 T^4}{\partial y^3} + \frac{8}{105\alpha^5} \frac{\partial^5 T^4}{\partial y^5} + \frac{4}{63\alpha^7} \frac{\partial^7 T^4}{\partial y^7} + \dots \right) \right]. \quad (5.30)$$

Если в правой части равенства (5.30) отбросить все слагаемые, кроме первого, то оно перейдет в градиентное представление вектора плотности результирующего потока излучения, аналогичное выражению (5.25) в методе диффузионного приближения.

Если же вместо того, чтобы отбрасывать члены ряда со старшими производными, заменить их, хотя бы приближенно, разностью первых производных от лучистой и термодинамической температуры, помноженных на соответствующие коэффициенты, то в итоге можно получить уточненное выражение для плотности результирующего потока излучения в неограниченной поглощающей среде [42].

Восьмой интегральный момент от интенсивности излучения следует выразить приближенно через лучистую температуру  $T_n$  и затем приравнять его к сумме членов ряда, полученного интегрированием по телесному углу разложения (5.27), предварительно умноженного на  $\cos^8 \theta$ :

$$\frac{\partial}{\alpha \partial y} \int_{(4\pi)} I_l \cos^8 \theta d\omega \approx \frac{4\sigma}{9\alpha} \frac{\partial T_n^4}{\partial y} \approx$$

$$\approx 4\sigma \frac{\alpha_n}{\alpha} \left( \frac{1}{9\alpha} \frac{\partial T^4}{\partial y} + \frac{1}{11\alpha^3} \frac{\partial^3 T^4}{\partial y^3} + \frac{1}{13\alpha^5} \frac{\partial^5 T^4}{\partial y^5} + \frac{1}{15\alpha^7} \frac{\partial^7 T^4}{\partial y^7} + \dots \right).$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} \left( \frac{1}{11\alpha^3} \frac{\partial^3 T^4}{\partial y^3} + \frac{1}{13\alpha^5} \frac{\partial^5 T^4}{\partial y^5} + \frac{1}{15\alpha^7} \frac{\partial^7 T^4}{\partial y^7} + \dots \right) \approx \frac{1}{9\alpha} \left( \frac{\partial T_n^4}{\partial y} - \frac{\alpha_n}{\alpha} \frac{\partial T^4}{\partial y} \right),$$

в левой части которого коэффициенты сопоставимы по величине с такими же коэффициентами ряда (5.30), что позволяет заменить в этом разложении сумму членов ряда со старшими производными правой частью последнего равенства, содержащей только первые производные от лучистой и термодинамической температуры:

$$q_n^\infty \approx -\frac{4\sigma}{3\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left[ T_n^4 + \frac{1}{3} \left( T_n^4 - \frac{\alpha_n}{\alpha} T^4 \right) \right].$$

Для упрощения записи полученного выражения целесообразно ввести понятие определяющей температуры  $T_\Sigma$ , которая

учитывает суммарное влияние лучистой и термодинамической температуры на перенос излучения в неограниченной среде:

$$T_{\Sigma}^4 \equiv T_n^4 + \frac{1}{3} \left( T_n^4 - \frac{\alpha_n}{\alpha} T^4 \right). \quad (5.31)$$

При использовании определяющей температуры уточненное дифференциальное выражение для плотности результирующего потока излучения в неограниченной среде приобретает достаточно простой вид, аналогичный градиентной формуле метода диффузионного приближения:

$$\mathbf{q}_n^{\infty} = -\frac{4\sigma}{3\alpha} \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{\partial \mathbf{y}}. \quad (5.32)$$

Зависимость (5.32) может быть также записана в более общей векторной форме:

$$\mathbf{q}_n^{\infty} = -\frac{4\sigma}{3\alpha} \text{grad} T_{\Sigma}^4. \quad (5.33)$$

Так как определяющая температура становится теперь расчетной величиной, то целесообразно ввести ее в дифференциальное уравнение сохранения лучистой энергии (5.24), примененное к неограниченной среде. Для этого лучистая температура  $T_n$  в уравнении сохранения заменяется определяющей температурой  $T_{\Sigma}$  по выражению, следующему из формулы (5.31). В результате дифференциальное уравнение сохранения лучистой энергии примет следующий вид:

$$\text{div} \mathbf{q}_n^{\infty} = 3\sigma (\alpha_n T^4 - \alpha T_{\Sigma}^4). \quad (5.34)$$

Подставив в формулу (5.34) градиентную зависимость (5.33) вектора плотности результирующего потока излучения, получим уточненное дифференциальное уравнение радиационного переноса в неограниченной поглощающей среде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{\alpha \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{\alpha \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{\alpha \partial z} \right) + \frac{9}{4} (\alpha_n T^4 - \alpha T_{\Sigma}^4) = 0. \quad (5.35)$$

Оно отличается от дифференциального уравнения радиационного переноса (5.26) метода диффузионного приближения как видом искомой функции, так и числовым коэффициентом в последнем слагаемом.

Чтобы иметь возможность применить дифференциальное уравнение радиационного переноса в неограниченной среде (5.35) к условиям теплообмена в ограниченном объеме газов, следует предположить, что гипотетическая неограниченная среда обладает теми же радиационными свойствами и имеет то же температурное поле, что и реальная поглощающая среда в ограниченном объеме. Таким образом, распределение термодинамической температуры  $T$  в обоих случаях следует считать одинаковым в пределах расчетной области. Различными будут лишь продолжения температурной кривой в ограждающих стенах и за их пределами.

Так как изменение термодинамической температуры в неограниченной среде за пределами расчетной области жестко не определено, примем физически достоверное допущение, что на поверхности ограждающих стен лежит точка перегиба температурной кривой, в которой производные второго и старших четных порядков равны нулю. Тогда из уравнений (5.29) и (5.31) последует простое граничное условие к дифференциальному уравнению (5.35):

$$\alpha T_{\Sigma_{\text{гр}}}^4 = \alpha_{\text{п}} T_{\text{ст}}^4, \quad (5.36)$$

где  $T_{\Sigma_{\text{гр}}}$  и  $T_{\text{ст}}$  – соответственно определяющая и термодинамическая температуры среды на поверхности ограждающих стен.

## § 9. Перенос излучения в ограниченном объеме газа

Излучение в ограниченном объеме газов рассматривается как результат наложения дополнительного излучения, источником которого является диффузно излучающая и отражающая поверхность ограждающих стен, на поток лучистой энергии ги-

потетической неограниченной поглощающей среды, к которому можно применить концепцию эквивалентного антисерого спектра и уточненные расчетные уравнения.

Проблема состоит в том, что неизвестно, как изменяется величина дополнительного потока излучения в объеме поглощающей среды. Даже приближенный учет его особенностей приводит к усложнению алгоритма математической модели и может внести новую погрешность в результаты компьютерного моделирования. Более целесообразным представляется обосновать условия, при которых уравнения, изначально предназначенные для гипотетической неограниченной среды, будут пригодны к применению при радиационном переносе теплоты в ограниченном объеме газов.

При достаточно большой оптической толщине  $\alpha l_{\text{эф}}$ , свойственной селективным газам в эквивалентном антисером спектре, дополнительное излучение, исходящее в полосах поглощения от противоположащих ограждающих стен, практически полностью поглощается в расчетном объеме. В результате на стены, ограничивающие объем газов, падает такой же поток лучистой энергии, как и на соответствующую им поверхность в гипотетической неограниченной поглощающей среде с той же температурой.

Его величину можно найти, интегрируя по полусферическому телесному углу  $\omega = 2\pi$  разложение интенсивности излучения (5.27). Если учесть, что четные производные на границе расчетной области, согласно условию (5.36), приравниваются к нулю, то поверхностная плотность падающего потока излучения будет представлена в виде ряда следующим образом:

$$E_{\text{пад}} = 2\sigma \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \left[ \frac{1}{2} T_{\text{ст}}^4 - \frac{1}{3\alpha} \left( \frac{\partial T^4}{\partial y} \right)_{\text{ст}} - \frac{1}{5\alpha^3} \left( \frac{\partial^3 T^4}{\partial y^3} \right)_{\text{ст}} - \frac{1}{7\alpha^5} \left( \frac{\partial^5 T^4}{\partial y^5} \right)_{\text{ст}} - \dots \right].$$

Отсюда, с учетом разложения (5.28), получим выражение для поверхностной плотности потока излучения, падающего на стены ограниченного объема газов:

$$E_{\text{пад}} \approx \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + \frac{1}{2} q_{\text{л.гр}}^{\infty}.$$

Схема потоков излучения на поверхности непрозрачных стен, излучающих и отражающих диффузно, то есть с одинаковой интенсивностью  $I_{\text{эф}}$  по всем направлениям в пределах полу-сферического телесного угла, приведена на рис. 5.6.

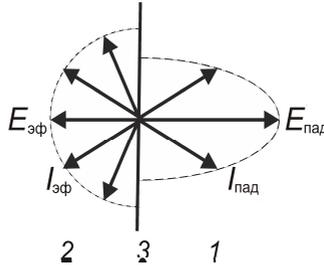


Рис. 5.6. Схема потоков излучения на поверхности стен:  
1 – падающего; 2 – эффективного; 3 – поверхность стены

Поверхностную плотность эффективного потока излучения стен в полосах поглощения антисерого спектра можно определить по выражению, аналогичному формуле (4.8):

$$E_{\text{эф}} = \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + \left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ст}}} - 1 \right) q_{\text{л.ст}},$$

где  $\varepsilon_{\text{ст}}$  – степень черноты поверхности стен;  $q_{\text{л.ст}}$  – плотность результирующего потока излучения ограниченного объема газов на поверхности ограждающих стен. Соотношение коэффициентов поглощения  $\alpha_{\text{п}}/\alpha$ , введенное в эту формулу, выделяет долю энергии полос поглощения эквивалентного антисерого спектра в эффективном излучении стен.

Следует различать на поверхности ограждающих стен плотности результирующего потока излучения гипотетической неограниченной поглощающей среды  $q_{\text{л.гр}}^{\infty}$  и ограниченного объема газообразной среды  $q_{\text{л.ст}}$ . Первая из них вычисляется по

теоретически обоснованной формуле (5.32). Плотность результирующего потока излучения  $q_{л.ст}$  на поверхности стен, ограждающих объем газов, находится как разность поверхностных плотностей падающего  $E_{пад}$  и эффективного  $E_{эф}$  потоков излучения и представляется в виде следующей формулы:

$$q_{л.ст} = q_{л.гр}^{\infty} \varepsilon_{ст} / 2, \quad (5.37)$$

Равенство (5.37) позволяет обосновать применение в реальных условиях радиационного теплообмена уравнений, полученных ранее для гипотетической неограниченной среды. По аналогии с равенством (5.31) введем понятие определяющей температуры в ограниченном объеме поглощающей среды. Так как в этом случае определяющая температура учитывает наложение дополнительного излучения стен на излучение неограниченной среды, ей дано соответствующее обозначение  $T_s$ :

$$T_s^4 \equiv T_n^4 + \frac{1}{3} \left( T_n^4 - \frac{\alpha_n}{\alpha} T^4 \right). \quad (5.38)$$

В результате градиентная формула (5.33) и дифференциальное уравнение сохранения лучистой энергии (5.34), примененное к ограниченному объему поглощающей среды, записываются в новых обозначениях следующим образом:

$$\mathbf{q}_n \approx -\frac{4\sigma}{3\alpha} \text{grad } T_s^4, \quad (5.39)$$

$$\text{div } \mathbf{q}_n = 3\sigma \left( \alpha_n T^4 - \alpha T_s^4 \right). \quad (5.40)$$

Вблизи стен равенство (5.39) становится приближенным.

Подстановка градиентного выражения (5.39) в уравнение (5.40) приводит к дифференциальному уравнению радиационного переноса в ограниченном объеме поглощающей среды:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_s^4}{\alpha \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_s^4}{\alpha \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_s^4}{\alpha \partial z} \right) + \frac{9}{4} \left( \alpha_n T^4 - \alpha T_s^4 \right) \approx 0. \quad (5.41)$$

Вдали от стен поглощение среды, как правило, сводит к нулю дополнительное излучение границ, так что формула (5.39) остается здесь достаточно точной и дает тот же расчетный результат, что и градиентная зависимость (5.33) в неограниченной среде. Если при этом плотность результирующего потока излучения  $q_{л.ст}$  на поверхности ограждающих стен найдена с приемлемой точностью, то погрешность формулы (5.39) будет проявляться лишь на ограниченном отрезке, соединяющем эти две области, и не сможет привести к существенной неадекватности расчетных результатов.

Чтобы избежать непредсказуемых погрешностей при постановке граничных условий, величину плотности результирующего потока излучения  $q_{л.ст}$  следует определять на поверхности стенки по формулам (5.32) и (5.37), точность которых достаточно обоснована. Из соотношения (5.37), с учетом градиентных выражений (5.33) и (5.39), непосредственно следуют граничные условия второго рода к дифференциальному уравнению (5.41):

$$\left(\partial T_s^4 / \partial n\right)_{ст} = \frac{\epsilon_{ст}}{2} \left(\partial T_{\Sigma}^4 / \partial n\right)_{ст}, \quad (5.42)$$

где индексом "ст" отмечены односторонние производные по нормали  $n$ , взятые на поверхности ограждающих стен.

Граничные условия третьего рода, необходимые для устойчивости алгоритма, рассчитываются приближенно и поэтому ставятся в тех узлах сетки на поверхности стен, где после их применения выполняется с приемлемой точностью равенство (5.37). При обосновании расчетной формулы возьмем за основу выражение, связывающее лучистую температуру с полусферическими поверхностными потоками излучения [43]:

$$4\sigma T_{л.ст}^4 = m_{эф} E_{эф} + m_{пад} E_{пад},$$

где  $m_{эф}$  и  $m_{пад}$  – соотношения интегралов от интенсивности излучения  $I_l$  по полусферическому телесному углу, определяющих объемные и поверхностные плотности потоков излучения на

стенке, причем для собственного и отраженного диффузного излучения можно принять  $m_{\text{эф}} = 2$ .

При плотности эффективного потока излучения, задаваемого формулой,

$$E_{\text{эф}} \equiv \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \varepsilon_{\text{ст}} \sigma T_{\text{ст}}^4 + (1 - \varepsilon_{\text{ст}}) E_{\text{пад}} = \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + (1 - \varepsilon_{\text{ст}}) q_{\text{л.гр}}^{\infty} / 2,$$

предыдущее равенство сводится к следующему выражению:

$$4\sigma T_{\text{л.ст}}^4 = 4 \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + (1 - \varepsilon_{\text{ст}}) q_{\text{л.гр}}^{\infty} + \frac{m}{2} q_{\text{л.гр}}^{\infty},$$

в котором неизвестным является лишь коэффициент  $m$  в последнем слагаемом, равный интегральному соотношению:

$$m = \left( \int_{(2\pi)} I_l d\omega - 2 \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 \right) / \left( \frac{1}{2} q_{\text{л.гр}}^{\infty} \right).$$

Числитель этого соотношения может быть найден почленным интегрированием по полусферическому телесному углу разложения интенсивности излучения  $I_l$  в ряд (5.27) с учетом того, что на поверхности стен четные производные от термодинамической температуры приняты равными нулю:

$$\int_{(2\pi)} I_l d\omega - 2\sigma \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} T^4 \approx -2\sigma \frac{\alpha_{\text{п}}}{\alpha} \left( \frac{\partial T^4}{2\alpha \partial y} + \frac{\partial^3 T^4}{4\alpha^3 \partial y^3} + \frac{\partial^5 T^4}{6\alpha^5 \partial y^5} + \frac{\partial^7 T^4}{8\alpha^7 \partial y^7} + \dots \right).$$

Сопоставляя числовые коэффициенты перед первыми производными в этом выражении и в разложении плотности результирующего потока излучения в ряд (5.28), получим приближенную оценку коэффициента  $m \approx 3/2$ . После перехода от лучистой к определяющей температуре расчетное выражение для граничных условий третьего рода приобретает следующий вид:

$$\sigma T_{\text{s.гр}}^4 = \sigma T_{\Sigma.\text{гр}}^4 + \left( \kappa - \frac{\varepsilon_{\text{ст}}}{3} \right) q_{\text{л.гр}}^{\infty}, \quad (5.43)$$

где  $\kappa = (1 + m/2)/3 \approx 0,583$ .

Предлагается следующая последовательность компьютерной реализации математической модели радиационного теплообмена. Сначала численно решается дифференциальное уравнение (5.35) переноса лучистой энергии в неограниченной поглощающей среде при граничных условиях (5.36). На этом этапе вычисляется определяющая температура  $T_{\Sigma}^4$ , что позволяет найти граничные значения плотности результирующего потока излучения гипотетической неограниченной среды  $q_{л.гр}^{\infty}$  по дискретному аналогу градиентной формулы (5.32) и результирующего потока излучения  $q_{л.ст}$  к стенам по соотношению (5.37).

Затем численно решается дифференциальное уравнение (5.41) переноса лучистой энергии в ограниченном объеме газов при граничных условиях (5.42) и (5.43). Решение дифференциальных уравнений (5.35) и (5.41), несмотря на тождественность их формы, приводит к разным результатам вследствие различий в постановке граничных условий.

### § 10. Расчет локального коэффициента поглощения

Коэффициенты поглощения обычно определяются в изотермических условиях. Если последовать этому правилу, то дифференциальное уравнение переноса лучистой энергии (5.22) превратится в характерное соотношение между планковским  $\alpha_n$  и локальным  $\alpha$  коэффициентами поглощения:

$$\alpha/\alpha_n = I_o/I_l \geq 1. \quad (5.44)$$

Таким образом, отношение локального коэффициента поглощения газов  $\alpha$  к среднему планковскому коэффициенту  $\alpha_n$  в изотермических условиях всегда оказывается больше единицы (или в пределе равно ей), что по своему содержанию противоположно известному соотношению (5.12) для коэффициента поглощения трехатомных газов  $\alpha_r$ .

Столь серьезные различия объясняются, прежде всего, тем, что локальный коэффициент  $\alpha$  в уравнении (5.22) учитывает поглощение лишь в полосах спектра, где лучистая энергия существенно отличается по своему спектральному составу от равновесного падающего излучения, используемого при определении коэффициента поглощения  $\alpha_r$  трехатомных газов.

Действительно, усреднение по спектру разных коэффициентов поглощения выполняется по-разному:

$$\alpha_n = \frac{1}{I_o} \int_0^{\infty} \alpha_v I_{ov} dv, \quad \alpha = \frac{1}{I_l} \int_0^{\infty} \alpha_v I_{lv} dv.$$

В эквивалентном антисером спектре усредняющие формулы имеют одинаковые числители, но разные знаменатели. То, что планковский коэффициент поглощения усреднен в спектре равновесного излучения  $I_o$ , а локальный коэффициент – в полосах поглощения энергии собственного излучения  $I_l$  селективных газов, как раз и приводит к характерному соотношению (5.44).

Из сравнения неравенств (5.12) и (5.44) следует, что в дифференциальных методах численного моделирования радиационного переноса нельзя напрямую заменять локальный коэффициент поглощения  $\alpha$  коэффициентом поглощения  $\alpha_r$  трехатомных газов. Необходимо установить правила, создающие корректный переход от одного вида коэффициентов поглощения к другому при расчете радиационного переноса в ограниченном объеме газов.

Если перенос излучения происходит в большом объеме поглощающей среды, оптическая толщина которой стремится к бесконечности, а спектр излучения приближается к антисерому, то локальный коэффициент поглощения в изотермических условиях может быть определен из сопоставления равенств (5.11) и (5.44):

$$\alpha = \alpha_n I_o / I_l = \alpha_n / A_r^{(l \rightarrow \infty)}, \quad (5.45)$$

где  $A_r^{(l \rightarrow \infty)}$  – поглощательная способность объема газов большой оптической толщины;  $\alpha_n$  – средний планковский коэффициент поглощения газов, величина которого не зависит от эффективной толщины излучающего слоя.

Если же рассчитывается радиационный перенос в ограниченном объеме газов, в спектре которого присутствуют слабые линии с интенсивностью излучения, не достигающей предельного равновесного состояния, то в этом случае становится возможным связать локальный коэффициент поглощения с меньшим по величине интегральным коэффициентом поглощения трехатомных газов  $\alpha_r$ .

Так как при очень малой толщине поглощающего слоя экспоненциальная формула (5.10) превращается в линейную зависимость,

$$A_r \approx \alpha_r I_{\text{эф}},$$

то для тонкого слоя газов и для такого же тонкого слоя, выделенного в эквивалентной антисерой среде, будет справедливо соотношение

$$(\alpha_r I_{\text{эф}}) I_o \approx (\alpha I_{\text{эф}}) I_l,$$

где интенсивности излучения  $I_o$  и  $I_l$  характеризуют величину лучистой энергии, падающей на соответствующие выделенные слои. Отсюда следует расчетная формула для моделирования радиационного переноса в тонком слое газа с применением понятия эквивалентного антисерого спектра:

$$\alpha = \alpha_r / A_r^{(l \rightarrow 0)}, \quad (5.46)$$

где  $A_r^{(l \rightarrow 0)}$  – поглощательная способность объема газов малой оптической толщины.

Следует отметить, что формулы (5.45) и (5.46), полученные для слоев газа разной оптической толщины, практически совпадают по своему физическому содержанию, поскольку в тонком

слое газов коэффициент поглощения  $\alpha_r$  близок по величине к среднему планковскому коэффициенту  $\alpha_n$ . Так как поглощательная способность  $A_\infty$  изотермических трехатомных газов в анти-сером спектре намного меньше единицы [44], то локальный коэффициент поглощения  $\alpha$  значительно, иногда в несколько раз, превосходит средний планковский коэффициент поглощения  $\alpha_n$  по своей величине.

По-видимому, локальный коэффициент поглощения  $\alpha$  для слоев поглощающей среды промежуточной толщины допустимо вычислять по формуле, усредняющей выражения (5.45) и (5.46). Полагая, что в полосах поглощения всегда присутствуют линии равновесного излучения и что число таких линий возрастает с увеличением оптической толщины слоя, усреднение следует выполнять с учетом влияния как толщины поглощающего слоя, так и содержания в нем трехатомных газов.

В качестве весового множителя в предлагаемом усреднении может быть использована, например, условная "планковская" поглощательная способность  $A_n$ , определяемая с помощью экспоненциальной формулы типа (5.10) по величине среднего планковского коэффициента поглощения  $\alpha_n$ :

$$A_n \approx 1 - \exp(-\alpha_n l_{\text{эф}}).$$

Здесь средний планковский коэффициент поглощения  $\alpha_n$  позволяет учесть влияние реальных радиационных свойств, а эффективная толщина излучающего слоя  $l_{\text{эф}}$  – влияние реальных размеров объема газов. Таким образом, чтобы получить адекватное усреднение, расчетная формула для локального коэффициента поглощения может иметь следующий вид [40]:

$$\alpha = [\alpha_r(1 - A_n) + \alpha_n A_n] / A_r. \quad (5.47)$$

Она показывает, что чем меньше оптическая толщина излучающего слоя, тем меньше значение весового множителя  $A_n$ , и тогда результат усреднения (5.47) приближается к формуле

(5.46). И наоборот, при возрастании оптической толщины излучающего слоя величина весового множителя  $A_n$  увеличивается, что позволяет учесть больший вклад среднего планковского коэффициента  $\alpha_n$  в результат вычислений локального коэффициента поглощения.

На рис. 5.7 изображено изменение локального коэффициента поглощения  $\alpha$  смеси газов, близкой по составу к продуктам горения природного газа (10 % углекислого газа, 20 % водяного пара), в зависимости от планковской поглощательной способности  $A_n$ . Кривая 1 соответствует формуле (5.47), кривая 2 представляет характерные для неограниченной поглощающей среды предельно высокие значения, вычисленные по формуле (5.45).

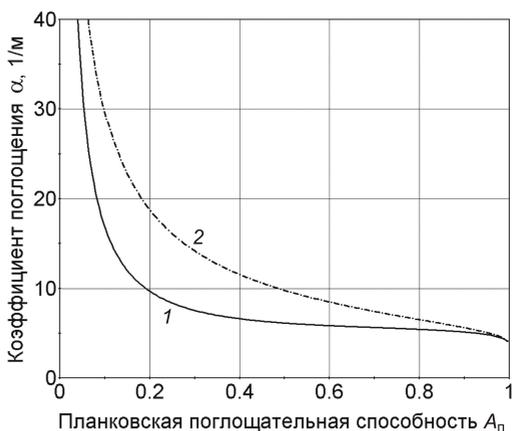


Рис. 5.7. Локальный коэффициент поглощения  $\alpha$  смеси газов, рассчитанный при 1500 К по формулам: 1 – (5.47), 2 – (5.45)

Рис. 5.7 показывает, что использование формулы (5.47) снижает расчетные значения локального коэффициента поглощения  $\alpha$  (кривая 1) по сравнению с его предельными значениями (кривая 2) примерно в 1,5...2 раза на значительной части диапазона изменения весового множителя  $A_n$ . Целесообразность ее применения потребует дополнительной проверки.

Представленный здесь способ расчета локального коэффициента поглощения обоснован лишь для изотермической поглощающей среды однородного химического состава, радиационные свойства которой одинаковы во всем расчетном объеме. Все же это не исключает возможности его доработки и успешного применения при численном моделировании радиационного переноса в среде неоднородных селективных газов.

В неизотермической среде локальный коэффициент поглощения  $\alpha$  вычисляется с учетом состава и температуры газов в каждом узле сетки. При этом поглощательная способность  $A_r$  рассматривается как вспомогательная локальная переменная. Ее усредненная величина  $\bar{A}_r$  используется при определении пропускательной способности  $(1-\bar{A}_r)$  объема газов в "окнах" эквивалентного антисерого спектра, в пределах которых может происходить прямой радиационный теплообмен между стенами промышленной печи и технологическим материалом.

Несомненным преимуществом уточненного дифференциального метода является возможность его осуществления при малых геометрических размерах ограниченного объема селективных газов, достаточная оптическая толщина которого обеспечивается высокими значениями локального коэффициента поглощения в полосах эквивалентного антисерого спектра. Дифференциальные уравнения радиационного и конвективного теплопереноса переноса удачно дополняют друг друга, что позволяет успешно применять их для численного моделирования высокотемпературных теплотехнологических процессов.

## **§ 11. Радиационный перенос в ослабляющей среде**

Обычно полагают, что твердые частицы, содержащиеся в газах, можно считать серой ослабляющей средой, способной как поглощать, так и рассеивать лучистую энергию при постоянных коэффициентах поглощения  $\alpha_r$  и рассеяния  $\beta_r$ , составляющих в сумме коэффициент ослабления  $k_r$ :

$$k_T = \alpha_T + \beta_T .$$

При рассеянии излучения частицами пыли направление распространения фотонов луча  $l'$  может измениться с некоторой вероятностью на направление  $l$ , и с такой же вероятностью фотоны луча  $l$  способны рассеиваться по направлению  $l'$ . Угловое распределение рассеянного излучения по различным направлениям представляется индикатрисой рассеяния  $\gamma_{l',l}$ , по величине которой определяется вероятность  $\gamma_{l',l}/4\pi$  рассеяния энергии луча  $l'$  по направлению  $l$  в расчете на единицу телесного угла. При равномерном (изотропном) пространственном рассеянии индикатриса становится сферической, а ее величина по всем направлениям равной единице.

Способ расчета коэффициентов поглощения и рассеяния для твердых частиц золы, взвешенных в газообразной среде, достаточно полно изложен в [45]. Хотя при рассеянии лучистой энергии на частицах угольной золы и технологической пыли индикатриса имеет вытянутую вперед форму, целесообразно при численном моделировании радиационного переноса приближенно выделять и вводить в расчет лишь изотропную сферическую часть рассеянного излучения, например, применяя для этого специальную  $\delta$ -функцию [46].

Для запыленной газообразной среды коэффициенты поглощения трехатомных газов и твердых частиц складываются, образуя суммарный коэффициент поглощения:

$$\alpha_s = \alpha_r + \alpha_T .$$

Следует иметь в виду, что при повышенной запыленности поглощение твердыми частицами лучистой энергии, испускаемой трехатомными газами, может привести к уменьшению расчетной длины луча, применяемой при вычислении коэффициентов поглощения  $\alpha_r$  по формулам (5.15) – (5.20). В этом случае необходимо оценить влияние на расчетную длину луча как эф-

фективной толщины излучающего слоя, так и средней длины свободного пробега фотонов между твердыми частицами, взвешенными в газах. Учитывая, что средняя длина свободного пробега фотонов является величиной, обратной коэффициенту поглощения  $\alpha_T$ , расчетную длину луча в первом приближении возможно определить, например, с помощью компьютерной функции, из двух величин выбирающей наименьшую:

$$l_{л} = \min(l_{эф}, \alpha_T^{-1}). \quad (5.48)$$

При численном моделировании поглощательная способность  $A_s$  неизотермической неоднородной ослабляющей среды рассматривается как вспомогательная переменная, которая определяется по величине коэффициента поглощения  $\alpha_s$  в каждом узле разностной сетки:

$$A_s = 1 - \exp(-\alpha_s l_{эф}).$$

В этой связи, запишем формулу для локального коэффициента поглощения запыленных газов в обобщенном виде:

$$\alpha = (\alpha_n + \alpha_T) / A_\infty,$$

где  $A_\infty$  – поглощательная способность в эквивалентном антисером спектре, усредняющая по длине луча сеточные значения  $A_s$  с учетом собственного излучения частей ослабляющей среды, участвующих в радиационном переносе.

Дифференциальное уравнение радиационного переноса теплоты по длине луча в ослабляющей среде, в отличие от аналогичного уравнения (5.22) для поглощающей среды, содержит два дополнительных слагаемых [27]. Одно из них учитывает уменьшение интенсивности излучения  $I_l$  из-за рассеяния энергии луча по другим направлениям; второе слагаемое – возрастание интенсивности излучения  $I_l$  за счет рассеяния по направлению  $l$  энергии лучей всех других возможных направлений в пределах сферического телесного угла  $\omega' = 4\pi$ :

$$\frac{\partial I_l}{\partial l} = (\alpha_n + \alpha_\tau) I_o - (\alpha + \beta) I_l + \frac{\beta}{4\pi} \int_{(4\pi)} I_r \gamma_{l,l} d\omega', \quad (5.49)$$

где  $I_o$ ,  $I_l$  – интегральные интенсивности соответственно равновесного излучения и энергии луча;  $\alpha_n$  – средний планковский коэффициент поглощения трехатомных газов;  $\alpha_\tau$  – постоянный по спектру коэффициент поглощения твердых пылевых частиц;  $\alpha$  – локальный коэффициент поглощения ослабляющей среды;  $\beta$  – коэффициент изотропного рассеяния.

Если принять во внимание, что индикатриса изотропного рассеяния равна единице и вероятность изотропного рассеяния энергии луча не изменяется по телесному углу, то появляется возможность ввести лучистую температуру в последнее слагаемое уравнения (5.49) в соответствии с её определением (5.6):

$$\frac{\beta}{4\pi} \int_{(4\pi)} I_r \gamma_{l,l} d\omega' = \beta \frac{\sigma}{\pi} T_n^4.$$

С учетом этого равенства запишем уравнение (5.49) в виде, более пригодном для последующих преобразований,

$$\frac{\partial I_l}{\partial l} = \alpha_o I_o - k I_l + \beta \frac{\sigma}{\pi} T_n^4, \quad (5.50)$$

применив в нем обобщенные обозначения коэффициентов:

$$\alpha_o = \alpha_n + \alpha_\tau,$$

$$k = \alpha + \beta,$$

где  $\alpha_o$  – коэффициент собственного излучения ослабляющей среды;  $k$  – локальный коэффициент ослабления,

Из уравнения (5.50) следует выражение для интенсивности излучения  $I_l$  в ослабляющей среде с изотропным рассеянием:

$$I_l = \frac{1}{k} \left( \alpha_o I_o + \beta \frac{\sigma}{\pi} T_n^4 \right) - \frac{1}{k} \frac{\partial I_l}{\partial l}.$$

Многokrатно дифференцируя эту формулу, получим бесконечную последовательность равенств, обе части которых будут содержать производные от интенсивности излучения  $I_l$  по длине луча. Подставляя полученные выражения для первой и старших производных от интенсивности излучения  $I_l$  в правую часть каждого предыдущего равенства, представим интенсивность излучения неограниченной ослабляющей среды в форме ряда:

$$I_l = \frac{\alpha_o}{k} \frac{\sigma}{\pi} \left( T^4 - \frac{\partial T^4}{k \partial l} + \frac{\partial^2 T^4}{k^2 \partial l^2} - \frac{\partial^3 T^4}{k^3 \partial l^3} + \frac{\partial^4 T^4}{k^4 \partial l^4} - \frac{\partial^5 T^4}{k^5 \partial l^5} + \dots \right) + \frac{\beta}{k} \frac{\sigma}{\pi} \left( T_n^4 - \frac{\partial T_n^4}{k \partial l} + \frac{\partial^2 T_n^4}{k^2 \partial l^2} - \frac{\partial^3 T_n^4}{k^3 \partial l^3} + \frac{\partial^4 T_n^4}{k^4 \partial l^4} - \frac{\partial^5 T_n^4}{k^5 \partial l^5} + \dots \right).$$

Можно доказать, что этот ряд сходится, что позволяет выполнять над ним математические преобразования. Его подстановка в формулы (5.4) и (5.6) с последующим интегрированием по сферическому телесному углу  $\omega = 4\pi$  дает выражения для плотности результирующего потока излучения и лучистой температуры в гипотетической неограниченной ослабляющей среде также в форме ряда:

$$q_n^\infty = -4\sigma \frac{\alpha_o}{k} \left( \frac{\partial T^4}{3k \partial y} + \frac{\partial^3 T^4}{5k^3 \partial y^3} + \frac{\partial^5 T^4}{7k^5 \partial y^5} + \frac{\partial^7 T^4}{9k^7 \partial y^7} + \dots \right) - 4\sigma \frac{\beta}{k} \left( \frac{\partial T_n^4}{3k \partial y} + \frac{\partial^3 T_n^4}{5k^3 \partial y^3} + \frac{\partial^5 T_n^4}{7k^5 \partial y^5} + \frac{\partial^7 T_n^4}{9k^7 \partial y^7} + \dots \right), \quad (5.51)$$

$$T_n^4 = \frac{\alpha_o}{k} \left( T^4 + \frac{\partial^2 T^4}{3k^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 T^4}{5k^4 \partial y^4} + \frac{\partial^6 T^4}{7k^6 \partial y^6} + \frac{\partial^8 T^4}{9k^8 \partial y^8} + \dots \right) + \frac{\beta}{k} \left( T_n^4 + \frac{\partial^2 T_n^4}{3k^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 T_n^4}{5k^4 \partial y^4} + \frac{\partial^6 T_n^4}{7k^6 \partial y^6} + \frac{\partial^8 T_n^4}{9k^8 \partial y^8} + \dots \right). \quad (5.52)$$

Произведем математические операции, аналогичные выполненным в § 8. Дифференцирование членов ряда (5.52) по координате  $y$  и подстановка полученного результата в (5.51) позволяет ввести лучистую температуру в выражение для результирующего потока излучения в неограниченной ослабляющей среде:

$$q_n^\infty = -\frac{4\sigma}{3k} \frac{\partial T_n^4}{\partial y} - 4\sigma \frac{\alpha_o}{k} \left( \frac{4}{45k^3} \frac{\partial^3 T^4}{\partial y^3} + \frac{8}{105k^5} \frac{\partial^5 T^4}{\partial y^5} + \frac{4}{63k^7} \frac{\partial^7 T^4}{\partial y^7} + \dots \right) - 4\sigma \frac{\beta}{k} \left( \frac{4}{45k^3} \frac{\partial^3 T_n^4}{\partial y^3} + \frac{8}{105k^5} \frac{\partial^5 T_n^4}{\partial y^5} + \frac{4}{63k^7} \frac{\partial^7 T_n^4}{\partial y^7} + \dots \right).$$

Здесь, так же как в [42], сумму слагаемых со старшими производными можно приближенно заменить разностью первых производных от лучистой и термодинамической температуры, помноженных на соответствующие коэффициенты, что приводит в итоге к уточненному выражению для плотности результирующего потока излучения в неограниченной ослабляющей среде:

$$q_n^\infty \approx -\frac{4\sigma}{3k} \frac{\partial}{\partial y} \left[ T_n^4 + \frac{1}{3k} (\alpha T_n^4 - \alpha_o T^4) \right].$$

Для упрощения записи полученной формулы целесообразно выражение в квадратных скобках заменить единой расчетной величиной, введя понятие определяющей температуры в неограниченной ослабляющей среде:

$$T_\Sigma^4 \equiv T_n^4 + \frac{1}{3k} (\alpha T_n^4 - \alpha_o T^4). \quad (5.53)$$

При отсутствии в газах частиц пыли, рассеивающих лучи, коэффициент рассеяния  $\beta$  становится равным нулю, и формула (5.53) переходит в аналогичное равенство (5.31) для определяющей температуры в неограниченной поглощающей среде.

## § 12. Расчетные уравнения для ослабляющей среды

Обобщенная формула (5.53) для определяющей температуры  $T_{\Sigma}$  позволяет представить плотность результирующего потока излучения в неограниченной ослабляющей среде в виде градиентной зависимости:

$$\mathbf{q}_n^{\infty} = -\frac{4\sigma}{3k} \text{grad } T_{\Sigma}^4. \quad (5.54)$$

Хотя рассеяние лучей не изменяет энергетического баланса, представленного уравнением сохранения лучистой энергии (5.24), запишем его с применением коэффициентов, принятых для неограниченной ослабляющей среды:

$$\text{div} \mathbf{q}_n^{\infty} = 4\sigma(\alpha_o T^4 - \alpha T_n^4).$$

Заменяя в этом уравнении лучистую температуру  $T_n$  определяющей температурой  $T_{\Sigma}$  в соответствии с формулой (5.53), приведем дифференциальное уравнение сохранения лучистой энергии в неограниченной ослабляющей среде к следующему расчетному виду:

$$\text{div} \mathbf{q}_n^{\infty} = \frac{4\sigma}{1 + \alpha/(3k)} (\alpha_o T^4 - \alpha T_{\Sigma}^4). \quad (5.55)$$

Подставив теперь в формулу (5.55) градиентную зависимость (5.54) вектора плотности результирующего потока излучения, получим уточненное дифференциальное уравнение радиационного переноса в неограниченной ослабляющей среде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{k \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{k \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}^4}{k \partial z} \right) + \frac{9}{3 + \alpha/k} (\alpha_o T^4 - \alpha T_{\Sigma}^4) = 0. \quad (5.56)$$

При допущении, что на поверхности ограждающих стен лежит точка перегиба температурной кривой, в которой все производные второго и старшего четного порядка равны нулю, из уравнений (5.52) и (5.53) следует граничное условие, обеспечи-

вающее однозначность решения дифференциального уравнения (5.56) радиационного переноса в ослабляющей среде:

$$\alpha T_{\Sigma \text{гр}}^4 = \alpha_o T_{\text{ст}}^4. \quad (5.57)$$

Таким образом, численное решение уравнения (5.56) и последующие вычисления по дискретному аналогу градиентной формулы (5.54) дают возможность найти распределение определяющей температуры  $T_{\Sigma}^4$  и плотность результирующего потока излучения  $q_{\text{л.гр}}^{\infty}$  в гипотетической неограниченной среде. Эти величины необходимы для корректной формулировки граничных условий радиационного теплообмена в высокотемпературных установках.

Для расчета определяющей температуры  $T_s$  в ограниченном объеме запыленных газов применяются формально такие же дифференциальные уравнения сохранения и радиационного переноса, как уравнения (5.55) и (5.56) для гипотетической неограниченной среды:

$$\text{div} \mathbf{q}_{\text{л}} = \frac{4\sigma}{1 + \alpha/(3k)} (\alpha_o T^4 - \alpha T_s^4). \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T_s^4}{k \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T_s^4}{k \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T_s^4}{k \partial z} \right) + \frac{9}{3 + \alpha/k} (\alpha_o T^4 - \alpha T_s^4) = 0. \quad (5.59)$$

Граничные условия к этому уравнению следуют из обоснованного ранее утверждения, что в эквивалентном антисером спектре на ограждающие стены падает практически такой же поток излучения, как и на соответствующую им поверхность в гипотетической неограниченной среде. С учетом (5.57) найдем, что величина падающего потока излучения определяется равенством,

$$E_{\text{пад}} \approx \frac{\alpha_o}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + \frac{1}{2} q_{\text{л.гр}}^{\infty},$$

в то время как для эффективного потока излучения будет справедлива формула, аналогичная (4.8):

$$E_{\text{эф}} = \frac{\alpha_o}{\alpha} \sigma T_{\text{ст}}^4 + (1/\varepsilon_{\text{ст}} - 1) q_{\text{л.ст}}. \quad (5.60)$$

Разность плотностей падающего и эффективного потоков излучения на поверхности стен, определенная по этим формулам, приводит к выражению (5.37) для радиационной теплоотдачи газообразной среды к ограждающим стенам. В результате при численном решении дифференциального уравнения (5.59) может быть применено соотношение (5.42) для граничных условий второго рода или следующее равенство для граничных условий третьего рода, обобщающее формулу (5.43):

$$\sigma T_{\text{s.гр}}^4 = \sigma T_{\Sigma.\text{гр}}^4 + \frac{3k + \alpha}{6(k + \alpha)} \left( \frac{7}{4} - \varepsilon_{\text{ст}} \right) q_{\text{л.гр}}^{\infty}.$$

Перенос лучистой энергии в "окнах" эквивалентного анти-серого спектра осложняется рассеянием лучей на пылевых частицах. В большинстве случаев допустима приближенная оценка влияния рассеяния на результат радиационного переноса вне полос поглощения, так как в этой части спектра лучистая энергия не поглощается и поэтому не воздействует непосредственно на температуру газообразной среды. Нужно лишь учитывать возможную зависимость температуры стен от результирующего потока излучения.

Практика численного моделирования радиационного теплообмена показывает, что точность расчета температурного поля в запыленной газообразной среде методом диффузионного приближения улучшается при повышенной концентрации в ней твердых частиц. Все же в рамках диффузионного приближения не удается достоверно определить результирующий поток излучения на поверхности стен, что оправдывает применение и в этом частном случае уточненной дифференциальной модели радиационного теплопереноса.

## Глава 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

### § 1. Уравнения радиационно-конвективного переноса

Радиационно-конвективный теплообмен осуществляется в газообразной среде промышленных печей и топок. В основе его математической модели лежит закон сохранения тепловой энергии, связывающий между собой нестационарное изменение энтальпии среды  $H$  и дивергенцию вектора плотности тепловых потоков, осуществляемых конвекцией  $\mathbf{q}_k$ , теплопроводностью  $\mathbf{q}_T$  и тепловым излучением  $\mathbf{q}_l$ :

$$\frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{q}_k + \operatorname{div} \mathbf{q}_T + \operatorname{div} \mathbf{q}_l = Q_v. \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), дифференциальное уравнение нестационарного радиационно-конвективного переноса теплоты в поглощающей среде при умеренных значениях температуры, позволяющих не учитывать теплоту диссоциации трехатомных газов, можно получить, если к левой части уравнения конвективного переноса (4.17) добавить выражение (5.40) для дивергенции вектора плотности  $\mathbf{q}_l$  результирующего потока излучения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u) c T}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v) c T}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w) c T}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + 3\sigma (\alpha_n T^4 - \alpha T_s^4) = Q_v. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь  $T$  – термодинамическая температура газообразной среды;  $T_s$  – определяющая температура;  $(\rho u)$ ,  $(\rho v)$ ,  $(\rho w)$  – соответственно продольная и поперечные компоненты вектора массовой скорости;  $c$  – удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении, средняя в интервале от 0 до  $t$  °С;  $a_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент температуропроводности;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $\alpha$  – локальный коэффициент поглощения среды;

$\alpha_n$  – планковский коэффициент поглощения трехатомных газов;  
 $\tau$  – время;  $Q_v$  – тепловыделение за единицу времени, приходящееся на единицу объема.

В математической модели высокотемпературных процессов теплообмена в качестве искомой функции применяется полная энтальпия газов  $H$ , учитывающая в соответствии с ее определением (4.1) как физическое теплосодержание газов, так и скрытую теплоту  $H_{\text{дис}}$  диссоциации трехатомных газов:

$$H = ct + H_{\text{дис}}. \quad (6.3)$$

Следует иметь в виду, что перенос составляющих полной энтальпии осуществляется на молекулярном уровне по-разному. Физическое теплосодержание переносится посредством теплопроводности при наличии градиента температуры, в то время как перенос теплоты диссоциации трехатомных газов происходит посредством диффузии продуктов частичного разложения трехатомных газов. Поэтому в общем случае дифференциальное уравнение радиационно-конвективного переноса теплоты в поглощающей среде высокотемпературных газов приобретает более сложный вид, чем уравнение (6.2), применяемое при умеренной температуре:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u) H}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v) H}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w) H}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho c a_{\text{эф}} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D_{\text{эф}} \frac{\partial H_{\text{дис}}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_{\text{эф}} \frac{\partial H_{\text{дис}}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho D_{\text{эф}} \frac{\partial H_{\text{дис}}}{\partial z} \right) + \\ & + 3\sigma (\alpha_n T^4 - \alpha T_s^4) = Q_v, \end{aligned}$$

где  $D_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение можно упростить, если пренебречь молекулярным переносом вследствие его малости по сравнению с турбулентным переносом и записать практиче-

ски одинаковые коэффициенты турбулентного переноса теплоты и массы в приближении (4.18):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u) H}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v) H}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w) H}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \\ & = Q_V + 3\sigma \left( \alpha T_s^4 - \alpha_p T^4 \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где  $\mu_T$  – турбулентный аналог динамического коэффициента вязкости;  $Pr_T$  – турбулентное число Прандтля.

Очевидным недостатком представления дифференциального уравнения в форме (6.4) является наличие в его правой части отрицательного слагаемого с термодинамической температурой в четвертой степени  $T^4$ . Чтобы улучшить структуру этого уравнения, следует, выполнив последовательные преобразования величины  $T^4$ , выделить из нее искомую энтальпию  $H$ , что позволит существенно уменьшить отрицательное слагаемое в свободном члене расчетного дискретного уравнения:

$$\begin{aligned} T^4 &= (t + T_o) T^3 = t T^3 + T_o T^2 (t + T_o) = t (T^3 + T_o T^2) + T_o^2 T^2 = \\ &= t (T^3 + T_o T^2) + T_o^2 T (t + T_o) = t (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T) + T_o^3 (t + T_o) = \\ &= t (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) + T_o^4, \end{aligned}$$

где  $T_o$  – термодинамическая температура при нормальных условиях, равная 273,15 К.

Замена температуры  $t$  энтальпией  $H$  в соответствии с формулой (6.3) завершает преобразование:

$$T^4 = (H - H_{\text{дис}}) (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) / c + T_o^4.$$

Это выражение в полной мере соответствует своему назначению. После его подстановки в уравнение (6.4) все основные слагаемые дифференциального уравнения радиационно-конвек-

тивного переноса теплоты будут содержать полную энтальпию газов  $H$  в качестве расчетной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)H}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)H}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)H}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \\ + 3\sigma\alpha_n (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) H / c = 3\sigma(\alpha T_s^4 - \alpha_n T_o^4) + \\ + 3\sigma\alpha_n (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) H_{\text{дис}} / c + Q_v. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В правую часть дифференциального уравнения (6.5) входит с отрицательным знаком лишь сравнительно небольшой множитель  $T_o^4$ , не превышающий величины  $T_s^4$  и не ухудшающий сходимости итераций.

Дифференциальное уравнение радиационно-конвективного переноса теплоты (6.5) преобразуется в дискретную алгебраическую форму (1.17) и решается численно совместно с дифференциальными уравнениями радиационного переноса (5.35) и (5.41) при граничных условиях, обоснованных в гл. 4 и гл.5. Вклад радиационной составляющей в перенос тепловой энергии учитывается слагаемым в правой части дифференциального уравнения (6.5), содержащим определяющую температуру  $T_s^4$ .

## § 2. Уравнения теплопереноса в ослабляющей среде

Для запыленных газов в систему расчетных уравнений войдут дифференциальные уравнения радиационного переноса теплоты (5.56) и (5.59). С учетом выражения (5.58) для дивергенции вектора  $q_{\text{л}}$  равенство (6.1) трансформируется в дифференциальное уравнение радиационно-конвективного переноса теплоты в ослабляющей среде, которое представим здесь в более общей цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)H}{\partial x} + \frac{\partial r(\rho v)H}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho w)H}{r \partial \varphi} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial H}{r \partial \varphi} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\sigma\alpha_o}{1+\alpha_o/(3k)} (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) H/c = \frac{4\sigma}{1+\alpha_o/(3k)} (\alpha T_s^4 - \alpha_o T_o^4) + \\
& + \frac{4\sigma\alpha_o}{1+\alpha_o/(3k)} (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3) H_{\text{дис}}/c + Q_V. \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Дискретный аналог дифференциального уравнения (6.6) принимает обобщенную форму уравнения (1.21):

$$a_P H_P = a_W H_W + a_E H_E + a_S H_S + a_N H_N + a_B H_B + a_T H_T + d_P.$$

Коэффициенты дискретного уравнения определяются здесь следующими формулами:

$$\begin{aligned}
a_W &= \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_w f(\text{Pe}_w) + \frac{\rho_w}{\Delta x} \max(u_w, 0),}{\Delta x^2} \\
a_E &= \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_e f(\text{Pe}_e) + \frac{\rho_e}{\Delta x} \max(-u_e, 0),}{\Delta x^2} \\
a_S &= \left[ \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_s f(\text{Pe}_s) + \frac{\rho_s}{\Delta r} \max(v_s, 0)}{\Delta r^2} \right] \frac{r_s}{r_p}, \\
a_N &= \left[ \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_n f(\text{Pe}_n) + \frac{\rho_n}{\Delta r} \max(-v_n, 0)}{\Delta r^2} \right] \frac{r_n}{r_p}, \\
a_B &= \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_b f(\text{Pe}_b) + \frac{\rho_b}{r_p \Delta \varphi} \max(w_b, 0),}{r_p^2 \Delta \varphi^2} \\
a_T &= \frac{(\mu_T/\text{Pr}_T)_t f(\text{Pe}_t) + \frac{\rho_t}{r_p \Delta \varphi} \max(-w_t, 0),}{r_p^2 \Delta \varphi^2} \\
a_P &= a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \rho_P^0 / \Delta \tau + \\
& + 4\sigma \frac{\alpha_{oP}}{1+\alpha_{oP}/(3k)_P} (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3)_P / c_P, \\
d_P &= Q_V + \frac{\rho_P^0}{\Delta \tau} H_P^0 + \frac{4\sigma}{1+\alpha_{oP}/(3k)_P} (\alpha T_s^4 - \alpha_o T_o^4)_P + \\
& + 4\sigma \frac{\alpha_{oP}}{1+\alpha_{oP}/(3k)_P} (T^3 + T_o T^2 + T_o^2 T + T_o^3)_P (H_{\text{дис}}/c)_P.
\end{aligned}$$

Обратный переход от энтальпии к термодинамической температуре осуществляется, как правило, с применением нижней релаксации (1.22) при параметре релаксации  $\alpha_p$  меньшем единицы:

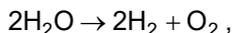
$$T_P = (1 - \alpha_p) T_P^* + \alpha_p [T_o + (H_P - H_{\text{дис}})/c],$$

где  $T_P^*$  – значение локальной термодинамической температуры, найденное в предыдущей итерации.

Способ расчета теплоты диссоциации трехатомных газов  $H_{\text{дис}}$ , входящей в свободный член  $d_P$  дискретного уравнения, требует специального рассмотрения.

### § 3. Теплота диссоциации трехатомных газов

При достаточно высокой температуре ( $T > 1500$  К) становится заметным тепловой эффект диссоциации трехатомных газов по результирующим химическим реакциям:



Теплота диссоциации трехатомных газов  $H_{\text{дис}}$ , соответствующая этим реакциям разложения, может быть определена по уравнению:

$$H_{\text{дис}} = (\Delta Q_{\text{H}_2} \rho_{\text{H}_2\text{O}} X_{\text{H}_2\text{O}} + \Delta Q_{\text{CO}} \rho_{\text{CO}_2} X_{\text{CO}_2}) / \rho_r,$$

где  $\Delta Q_{\text{H}_2}$ ,  $\Delta Q_{\text{CO}}$  – теплота сгорания соответственно водорода и окиси углерода, Дж/м<sup>3</sup>;  $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $\rho_{\text{CO}_2}$  – объемные доли водяного пара и углекислого газа в газовой среде;  $X_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $X_{\text{CO}_2}$  – степень диссоциации соответствующего трехатомного газа;  $\rho_r$  – плотность газовой среды, кг/м<sup>3</sup>.

Расчет степени диссоциации трехатомных газов осуществляется по эмпирическим формулам [47, 48]. Сначала вычисляются десятичные логарифмы констант равновесия  $K_p$  для приведенных выше реакций при локальной температуре среды  $T$ :

для водяного пара,

$$\lg K_p = 3,05 - 13160 / T ,$$

для углекислого газа,

$$\lg K_p = 4,47 - 14700 / T ,$$

Затем находятся константы равновесия и степень диссоциации каждого трехатомного газа по алгебраическому уравнению:

$$X^3 = (1 - X)^2(2 + X)K_p^2/p ,$$

где  $p$  – объемная доля одного из трехатомных газов в газовой среде,  $X$  – степень диссоциации этого газа.

При температуре газов до 2200 °С допускается применение кубического уравнения упрощенного вида:

$$X^3 = (2 - 3X)K_p^2/p .$$

Наконец, при температуре ниже 1800 °С эти уравнения сводятся к следующему простому равенству:

$$X^3 = 2K_p^2/p .$$

Предложенные эмпирические формулы позволяют вычислять степень диссоциации трехатомных газов с погрешностью до 2 % [48], приемлемой при моделировании тепловых процессов. В частности, при температуре газов до 2200 °С расчетная зависимость приводится к форме кубического уравнения, для которого имеется алгебраическое решение [49]:

$$X^3 = bX + c .$$

С учетом выражений, которые в данном случае присваиваются коэффициентам кубического уравнения,

$$b = -3K_p^2/p , \quad c = 2K_p^2/p ,$$

это решение имеет следующий вид:

$$X = (K_p^2/p)^{1/3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + K_p^2/p} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{1 + K_p^2/p} - 1 \right)^{1/3} \right] .$$

В тех случаях, когда локальная температура среды превышает 2200 °С, полученный приближенный результат теоретического решения кубического уравнения следует подставить в правую часть более общей формулы и уточнить степень диссоциации компонента методом последовательных приближений.

#### § 4. Температура поверхности ограждающих стен

В тех случаях, когда при численном исследовании тепло-массопереноса температура внутренней поверхности стен высокотемпературной установки заранее не известна, встает задача компьютерного моделирования более сложного сопряженного теплообмена, включая теплопроводность в ограждающих стенах. Чтобы упростить проблему, по-видимому, допустимо рассчитывать плотность теплового потока через стены  $q_{ст}$  по уравнению теплопередачи, что, как правило, обеспечивает достаточную точность результатов в стационарной технической задаче:

$$q_{ст} = k_{ст}(T_{ст} - T_a), \quad (6.7)$$

где  $T_{ст}$  – температура внутренней поверхности стен печи;  $T_a$  – температура атмосферного воздуха;  $k_{ст}$  – коэффициент теплопередачи через стены, аналогичный коэффициенту, определяемому формулой (4.4),

$$k_{ст} = \left( \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i + 1 / \alpha_2 \right)^{-1};$$

$n$  – число слоев в стене с неодинаковыми значениями коэффициента теплопроводности  $\lambda_i$ ;  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стены к атмосферному воздуху.

На внутренней (нагреваемой) поверхности стен граничные условия к дифференциальному уравнению стационарного радиационно-конвективного переноса определяются теперь, исходя из равенства потоков теплоты, подводимой к этой поверхности и отводимой от нее через футеровку в окружающую среду:

$$q_{к.ст} + q_{л.ст} + q_{пр} = q_{ст}, \quad (6.8)$$

где  $q_{к.ст}$  – плотность конвективного теплового потока от турбулентной газообразной среды к поверхности стен;  $q_{л.ст}$  – плотность результирующего потока излучения на поверхности стен;  $q_{пр}$  – плотность результирующего потока пропущенного излучения в "окнах" эквивалентного антисерого спектра.

Определяя конвективный поток теплоты по формуле (4.28), учтем дополнительно перенос теплоты диссоциации трехатомных газов в пограничном слое турбулентной среды:

$$q_{к.ст} \approx \zeta \frac{\rho_{ст}}{\rho_{г.т}} (H - H_{ст}) = \zeta \frac{\rho_{ст}}{\rho_{г.т}} \left[ H - (c_{ст} t_{ст} + H_{дис}^{ст}) \right], \quad (6.9)$$

где  $H_{ст}$ ,  $H_{дис}^{ст}$  – энтальпия среды и теплота диссоциации на поверхности стены;  $H$  – полная энтальпия среды вблизи поверхности стены;  $t_{ст}$  – температура расчетного участка стены, °С.

Чтобы найти на поверхности стен плотность  $q_{л.ст}$  результирующего потока излучения поглощающей среды, градиентная зависимость (5.32) для неограниченной поглощающей среды приводится к дискретному виду,

$$q_{л}^{\infty} = \frac{4\sigma}{3\alpha} (T_{\Sigma}^4 - T_{\Sigma ст}^4) / y_P,$$

с последующей заменой на поверхности стенки определяющей температуры  $T_{\Sigma ст}$  термодинамической температурой  $T_{ст}$  в соответствии с граничными условиями (5.36). Подставив полученное выражение в формулу (5.37), получим искомое равенство:

$$q_{л.ст} \approx \frac{2\sigma \varepsilon_{ст}}{3\alpha y_P} \left( T_{\Sigma}^4 - \frac{\alpha_{п}}{\alpha} T_{ст}^4 \right), \quad (6.10)$$

где  $\varepsilon_{ст}$  – степень черноты внутренней поверхности стен;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $\alpha_{п}$ ,  $\alpha$  – средний планковский и локальный коэффициенты поглощения газообразной среды;  $y_P$  – расстояние по нормали от поверхности стен до ближайшего

узла  $P$  сетки;  $T_{\text{ст}}$  – термодинамическая температура поверхности стены;  $T_{\Sigma}$  – определяющая температура неограниченной поглощающей среды в узле сетки, ближайшем к стене.

Рассмотрим выражение для результирующего потока  $Q_{j,k}$  переизлучения  $j$ -го участка поверхности стен или слоя технологического материала на расчетный  $k$ -й участок стены:

$$Q_{j,k} = (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{\text{пр}} \sigma (T_j^4 \Psi_{j,k} F_j - T_k^4 \Psi_{k,j} F_k),$$

где  $\bar{A}_r$  – средняя поглощательная способность газообразной среды в пространстве между участками поверхностей, обменивающимися лучистой энергией;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты в системе тел "стена-материал";  $T_j$ ,  $T_k$  – термодинамическая температура соответственно  $j$ -го участка переизлучающей поверхности и расчетного  $k$ -го участка стены;  $F_j$ ,  $F_k$  – площади соответственно  $j$ -го участка переизлучающей поверхности и расчетного  $k$ -го участка стены;  $\Psi_{j,k}$ ,  $\Psi_{k,j}$  – угловые коэффициенты излучения соответственно  $j$ -го участка противоположной поверхности на  $k$ -й участок стены и, наоборот,  $k$ -го участка стены на  $j$ -й участок противоположной поверхности.

Применим правило равенства взаимных поверхностей [27]:

$$\Psi_{j,k} F_j = \Psi_{k,j} F_k.$$

Результаты подстановки этого равенства в формулу для  $Q_{j,k}$  суммируются по всем участкам переизлучающей поверхности стен и слоя материала. Поделив полученное выражение на площадь  $F_k$ , получим формулу для расчета на  $k$ -м участке стены плотности  $q_{\text{пр}}$  результирующего потока излучения, пропущенного в окна эквивалентного антисерого спектра:

$$q_{\text{пр}} \approx (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \sum_j \Psi_{k,j} (T_j^4 - T_{\text{ст}}^4). \quad (6.11)$$

Здесь температура  $k$ -го участка стены обозначена  $T_{\text{ст}}$ , так же как и в выражениях для остальных слагаемых уравнения (6.8).

Приведенная степень черноты  $\varepsilon_{пр}$ , учитывающая взаимное отражение лучей поверхностями стен и технологического материала, может быть приближенно найдена по формуле (4.10):

$$\varepsilon_{пр} = \left[ \frac{1}{\varepsilon_{сл}} + \left( \frac{1}{\varepsilon_{ст}} - 1 \right) \frac{F_{сл}}{F_{ст}} \right]^{-1},$$

где  $\varepsilon_{сл}$ ,  $\varepsilon_{ст}$  – степень черноты соответственно слоя технологического материала и стен;  $F_{сл}$ ,  $F_{ст}$  – поверхность слоя и стен печи.

Величина углового коэффициента излучения  $\psi_{kj}$  зависит от геометрии рабочего пространства. Например, участки поверхности стен вращающейся печи, выделенные радиальными линиями сетки на рис. 6.1, могут рассматриваться как бесконечно длинные полосы, излучающие на параллельную им поверхность слоя технологического материала.

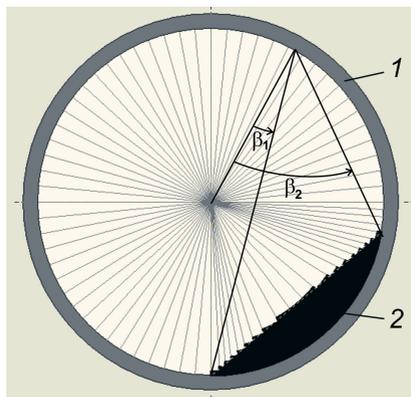


Рис. 6.1. Схема переизлучения в "окнах" антисерого спектра:  
1 – стены печи; 2 – слой клинкера;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – вспомогательные углы к расчету углового коэффициента излучения

Такой подход позволяет применить для расчета углового коэффициента излучения стен на слой материала формулу [50]:

$$\psi_{к, сл} = (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)/2,$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – углы, образованные перпендикуляром к малому участку футеровки и линиями, соединяющими центр этого участка с крайними точками по ширине слоя технологического материала. Подобным образом рассчитывается также и взаимное излучение друг на друга разных участков стен вращающейся печи.

Выражения (6.7) и (6.9) – (6.11), записанные для плотностей тепловых потоков, содержат температуру участка внутренней поверхности стены  $t_{ст}$  или  $T_{ст}$ , величина которой при стационарной тепловой работе высокотемпературной установки не изменяется во времени. Подстановка этих выражений в равенство (6.8) позволяет представить в явном виде температуру внутренней поверхности стен, нагреваемых турбулентным потоком излучающих газов, и найти ее значение  $T_{ст}$  на каждом  $k$ -м расчетном участке:

$$T_{ст} \left[ k_{ст} + \zeta \frac{\rho_{ст} c_{ст}}{Pr_T} + \frac{2\varepsilon_{ст}}{3\alpha y_P} \frac{\alpha_n}{\alpha} \sigma T_{ст}^3 + (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{пр} \sigma \sum_j \Psi_{k,j} T_{ст}^3 \right] =$$

$$= k_{ст} T_a + \zeta \frac{\rho_{ст}}{Pr_T} (H + c_{ст} T_o - H_{дис}^{ст}) + \frac{2\varepsilon_{ст}}{3\alpha y_P} \sigma T_{ст}^4 + (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{пр} \sigma \sum_j \Psi_{k,j} T_j^4,$$

(6.12)

где  $k_{ст}$  – коэффициент теплопередачи;  $\zeta$  – коэффициент пристенного переноса;  $\rho_{ст}$ ,  $c_{ст}$  – плотность и удельная массовая теплоемкость газообразной среды при температуре стенки;  $Pr_T$  – турбулентное число Прандтля;  $\varepsilon_{ст}$  – степень черноты поверхности стен;  $\alpha_n$ ,  $\alpha$  – средний планковский и локальный коэффициенты поглощения газов;  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $y_P$  – расстояние по нормали от стены до ближайшего узла сетки;  $\bar{A}_r$  – средняя поглощательная способность среды;  $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень черноты в системе поверхностей технологического материала и стен печи;  $\Psi_{k,j}$  – угловой коэффициент излучения расчетного участка стены на противоположные участки поверхности стен или технологического материала;  $H$  – энтальпия

газообразной среды вблизи стены;  $H_{\text{дис}}^{\text{ст}}$  – теплота диссоциации трехатомных газов при температуре стен;  $T_{\Sigma}$  – определяющая температура вблизи стены;  $T_a$ ,  $T_j$  – термодинамические температуры соответственно атмосферного воздуха и противоположных участков стен или технологического материала,  $T_o$  – термодинамическая температура при нормальных условиях.

### § 5. Аккумуляция теплоты в стенах вращающейся печи

При обжиге цементного клинкера во вращающейся печи технологический материал и стены имеют разную температуру. Вследствие этого при контакте новых участков стен с перемещающимся по ним слоем клинкера температура их внутренней поверхности изменяется скачкообразно до температуры слоя клинкера  $T_{\text{сл}}$ , снижаясь в зоне спекания и повышаясь в зоне охлаждения. На участке контакта с технологическим материалом часть тепловой энергии аккумулируется в стене (с положительным или отрицательным знаком), а затем после выхода этого участка из-под слоя клинкера в основном передается газообразной среде в рабочем пространстве печи и переизлучается на другие участки стен.

Температурные колебания в стенах вращающейся печи сосредоточены в тонком слое, прилегающем к их внутренней поверхности, что позволяет применить здесь теоретическое решение задачи, полученное в [27] для полубесконечного массивного тела. Так как клинкер частично расплавлен, можно обоснованно принять, что соприкасающиеся поверхности стен и обжигаемого материала имеют полный контакт и одинаковые температуры.

В таком случае формула (4.15), примененная к стенам вращающейся печи, позволит найти плотность потока аккумулируемой теплоты, проходящего через их поверхность:

$$q_{\text{ак}} = b_{\text{ак}} (T_{\text{сл}} - T'_{\text{ст}}), \quad (6.13)$$

где  $T_{ст}$  – температура слоя технологического материала;  $T'_{ст}$  – температура поверхности вращающихся стен непосредственно перед входом их под слой клинкера;  $b_{ак}$  – коэффициент теплоусвоения при аккумуляции теплоты в стенах печи под слоем технологического материала,

$$b_{ак} = \sqrt{\frac{\lambda_{ст} \rho_{ст} c_{ст}}{\pi \tau_{ак}}}, \quad (6.14)$$

$\lambda_{ст}$ ,  $\rho_{ст}$ ,  $c_{ст}$  – коэффициент теплопроводности, плотность и удельная массовая теплоемкость материала стен;  $\tau_{ак}$  – время, прошедшее с момента температурного скачка.

Постановка технической задачи иллюстрируется изображением поперечного сечения вращающейся печи на рис. 6.2.

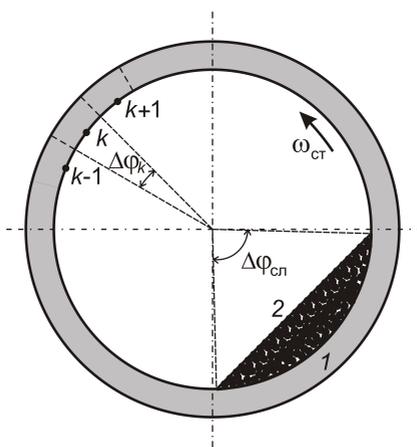


Рис. 6.2. Схематичное изображение поперечного сечения вращающейся печи: 1 – стена печи; 2 – слой обжигаемого технологического материала;  $k$  – расчетный участок стены

$\Delta\varphi_{стл}$ ,  $\Delta\varphi_k$  – центральные углы слоя и  $k$ -го участка;

$\omega_{стл}$  – угловая скорость вращения стен

Теплоотдача от технологического материала к стенам вращающейся печи отличается от условий задачи [27] тем, что под

слой клинкера непрерывно входят и испытывают температурный скачок все новые части поверхности стен. Время  $\Delta\tau$  их нагрева (или охлаждения) технологическим материалом при прохождении радиусом стен угла  $\varphi$  по окружности печи является величиной, обратно пропорциональной угловой скорости  $\omega_{ст}$  вращения стен печи:

$$\Delta\tau = \Delta\varphi / \omega_{ст} .$$

Так как все участки поверхности стен, в конечном счете, находятся в контакте с технологическим материалом одно и то же время  $\tau_{ак}$ , задаваемое величиной центрального угла  $\Delta\varphi_{сл}$  слоя клинкера (см. рис. 6.2), то количество теплоты  $Q_{ак}$ , аккумулированной под слоем клинкера на единице длины печи за единицу времени, определится интегрированием плотности теплового потока  $q_{ак}$  по поверхности теплообмена  $F$  с учетом зависимости времени  $\tau$  и поверхности  $F$  от изменения координаты  $\varphi$  в пределах центрального угла  $\Delta\varphi_{сл}$ :

$$Q_{ак} = \int_0^F q_{ак} dF = \sqrt{\frac{\lambda_{ст} \rho_{ст} c_{ст}}{\pi}} \omega_{ст} (T_{сл} - T'_{ст}) R \int_0^{\Delta\varphi_{сл}} \varphi^{-1/2} d\varphi ,$$

где  $R$  – внутренний радиус стен печи.

После математических преобразований получаем формулу, аналогичную зависимости [27] для неподвижного полуограниченного массивного тела:

$$Q_{ак} = 2b_{ак} (T_{сл} - T'_{ст}) R \Delta\varphi_{сл} . \quad (6.15)$$

Чтобы упростить вычисление коэффициента теплоусвоения по формуле (6.14), продолжительность аккумуляции теплоты  $\tau_{ак}$  заменена в ней соотношением  $\Delta\varphi_{сл} / \omega_{ст}$ :

$$b_{ак} = \sqrt{\frac{\lambda_{ст} \rho_{ст} c_{ст}}{\pi \Delta\varphi_{сл}}} \omega_{ст} . \quad (6.16)$$

## § 6. Температура стен вращающейся печи

При расчете нестационарной температуры стен, обтекаемых газовым потоком, следует принимать во внимание, что теплота  $Q_{ак}$ , аккумулированная стенами печи под слоем технологического материала, переносится при их вращении в ближайшие по окружности узлы сетки. Чтобы найти нестационарную температуру  $T_{ст}^k$  расчетного  $k$ -го участка внутренней поверхности стен, следует в левую часть уравнения теплового баланса (6.8) добавить плотность  $q_{нст}$  нестационарного потока теплоты, переносимой соседним участком вращающейся стены, обозначенным индексом  $k+1$  (см. рис. 6.2):

$$q_{к.ст} + q_{л.ст} + q_{пр.ст} + q_{нст} = q_{ст}, \quad (6.17)$$

Выражение для плотности нестационарного теплового потока  $q_{нст}$  найдем с помощью дифференциального уравнения теплопроводности (4.12), применив последнее к одномерной задаче переноса теплоты в цилиндрических стенах печи:

$$\rho_{ст} c_{ст} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

При численном решении задачи стена разделяется сеткой на слои по координате  $r$ . Интегрирование этого уравнения по времени  $\tau$  и по координате  $r$  в половинном контрольном объеме (см. рис. 4.4), одна из граней которого совмещена с поверхностью стены, нагреваемой газообразной средой печи, приводит к следующему дискретному равенству:

$$\frac{\rho_{ст} c_{ст}}{\Delta \tau_k} (T_{ст}^{k+1} - T_{ст}^k) \frac{\Delta r}{2} \approx \frac{\lambda_s}{r_{ст} \Delta r} (r_s T_s^k - r_{ст} T_{ст}^k) - \lambda_{ст} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{ст}, \quad (6.18)$$

где индексом "ст" обозначены величины на внутренней поверхности стены;  $T_{ст}^k, T_{ст}^{k+1}$  – температура в узлах сетки с индексами  $k$  и  $k+1$  по окружности печи;  $T_s^k$  – температура внутри стены в соседнем узле  $S$  сетки;  $\lambda_s$  – коэффициент теплопроводности на общей грани двух контрольных объемов;  $\Delta r$  – расстояние между

узлами сетки по радиусу;  $\Delta\tau_k$  – время, за которое преодолевается при вращении печи расстояние по дуге окружности  $k$ -го контрольного объема (см. рис. 6.2):

$$\Delta\tau_k = \Delta\varphi_k / \omega_{\text{ст}} \approx (\varphi_{k+1} - \varphi_k) / \omega_{\text{ст}} .$$

Левая часть дискретного уравнения (6.18) учитывает вклад нестационарности в процесс переноса теплоты через поверхность стен. По аналогии с ней запишем в обобщенном виде выражение для плотности нестационарного теплового потока в составе уравнения (6.17):

$$q_{\text{нст}} = \frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \omega_{\text{ст}}}{\Delta\varphi_k} (T_{\text{ст}}^{k+1} - T_{\text{ст}}^k) \Delta r_{\text{нст}} , \quad (6.19)$$

где  $\Delta r_{\text{нст}}$  – эффективная толщина слоя нестационарности, в пределах которого аккумулируется наибольшее количество теплоты, отдаваемой слоем технологического материала стенам печи через поверхность их контакта.

Чтобы дать оценку величины  $\Delta r_{\text{нст}}$ , примем, что, вследствие стабильной периодичности теплообменного процесса при вращении печи, поверхностный слой ее стен в течение одного оборота потеряет всю теплоту, которую он аккумулировал, находясь под клинкером, и возвратится в то же термодинамическое состояние, что и перед входом под слой клинкера в предыдущем обороте печи. Это допущение позволяет приравнять поток теплоты, рассчитанный с помощью формулы (6.19) на всем участке стены, обтекаемом газами, к количеству теплоты (6.15), аккумулированной стеной под слоем клинкера:

$$\frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \omega_{\text{ст}}}{\Delta\varphi_{\Gamma}} (T_{\text{ст}}'' - T_{\text{ст}}') \Delta r_{\text{нст}} R \Delta\varphi_{\Gamma} = 2 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}}}{\pi \Delta\varphi_{\text{ст}}}} \omega_{\text{ст}} (T_{\text{стл}} - T_{\text{ст}}') R \Delta\varphi_{\text{ст}} ,$$

где  $T_{\text{ст}}'$ ,  $T_{\text{ст}}''$  – температура поверхности стены перед входом под слой клинкера и на выходе ее из-под слоя клинкера,  $\Delta\varphi_{\Gamma}$  – центральный угол участка поверхности стены, обтекаемого газами:

$$\Delta\varphi_r = 2\pi - \Delta\varphi_{\text{сл}}.$$

В обе части записанного выше равенства входит фактически одна и та же температурная разность, которая сократится. Отсюда следует приближенное выражение для эффективной толщины слоя нестационарности в стенах вращающейся печи:

$$\Delta r_{\text{нст}} \approx 2 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}} \Delta\varphi_{\text{сл}}}{\pi \rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \omega_{\text{ст}}}}. \quad (6.20)$$

В качестве примера примем приближенные значения физических величин в формуле (6.20), характерные для вращающейся печи:  $\lambda_{\text{ст}} = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\rho_{\text{ст}} = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $c_{\text{ст}} = 1050 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $\Delta\varphi_{\text{сл}} = \pi/2 \text{ рад}$ ,  $\omega_{\text{ст}} = \pi/24 \text{ рад}/\text{с}$ . Вычисленная по ним эффективная толщина слоя нестационарности  $\Delta r_{\text{нст}} \approx 2,7 \text{ мм}$  составляет немного более сотой доли от толщины стен вращающейся печи. Поскольку слой нестационарности сравнительно мал, можно полагать, что теплота, аккумулируемая в нем за один оборот печи, в целом слабо повлияет на характер изменения температуры по толщине ее стен.

Подставив в уравнение (6.19) выражение (6.20), дающее оценку толщины слоя нестационарности, получим приближенную формулу для плотности нестационарного теплового потока:

$$q_{\text{нст}} \approx 2b_{\text{ак}} (T_{\text{ст}}^{k+1} - T_{\text{ст}}^k) \Delta\varphi_{\text{сл}} / \Delta\varphi_k. \quad (6.21)$$

где коэффициент теплоусвоения определен выражением (6.16).

С учетом дополнительного нестационарного слагаемого (6.21) и полученных ранее выражений для плотностей тепловых потоков равенство (6.17) превращается в приближенное уравнение для вычисления температуры  $k$ -го участка внутренней поверхности стен вращающейся печи, обобщающее формулу (6.12), полученную ранее для стационарной температуры стен высокотемпературной теплотехнологической установки:

$$\begin{aligned}
T_{\text{CT}}^k \left[ k_{\text{CT}} + \zeta \frac{\rho_{\text{CT}} c_{\text{CT}}}{Pr_T} + \frac{2\alpha_{\text{п}} \varepsilon_{\text{CT}} \sigma}{3\alpha^2 \gamma_P} (T_{\text{CT}}^k)^3 + (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{\text{пр}} \sigma (T_{\text{CT}}^k)^3 + 2b_{\text{ак}} \frac{\Delta\varphi_{\text{сл}}}{\Delta\varphi_k} \right] \approx \\
\approx k_{\text{CT}} T_a + \zeta \frac{\rho_{\text{CT}}}{Pr_T} (H + c_{\text{CT}} T_o - H_{\text{дис}}^k) + \frac{2\varepsilon_{\text{CT}}}{3\alpha\gamma_P} \sigma T_{\Sigma}^4 + \\
+ (1 - \bar{A}_r) \varepsilon_{\text{пр}} \sigma \sum_j \psi_{k,j} T_j^4 + 2b_{\text{ак}} \frac{\Delta\varphi_{\text{сл}}}{\Delta\varphi_k} T_{\text{CT}}^{k+1}, \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Здесь  $b_{\text{ак}}$  – коэффициент усвоения стенами аккумулируемой теплоты;  $\Delta\varphi_{\text{сл}}$ ,  $\Delta\varphi_k$  – центральные углы слоя технологического материала и  $k$ -го участка стен;  $T_{\text{CT}}^k$ ,  $T_{\text{CT}}^{k+1}$  – термодинамические температуры  $k$ -го и  $(k+1)$ -го участков поверхности стен;  $H_{\text{дис}}^k$  – теплота диссоциации трехатомных газов на поверхности  $k$ -го участка. Остальные обозначения те же, что и в уравнении (6.11).

Основной недостаток примененного аналитического подхода состоит в упрощенной оценке величины теплового потока  $q_{\text{CT}}$ , отдаваемого через стены печи атмосферному воздуху, принимая во внимание, что в нестационарных условиях его пропорциональность температурному перепаду ( $T_{\text{CT}} - T_a$ ), принятая в формуле (6.7), выполняется лишь приближенно.

## § 7. Адекватность модели аккумуляции теплоты

Чтобы проверить допустимость упрощенного аналитического подхода к расчету нестационарной температуры стен, был поставлен численный эксперимент [51]. С помощью компьютерной программы моделировались горение природного газа и теплообмен в цементной вращающейся печи "мокрого" способа производства с диаметром корпуса 5 м, толщиной хромомagneзитовой футеровки 230 мм и минимальной расчетной толщиной слоя клинкерной обмазки 20 мм, предохраняющей футеровку от разрушения. Температура внутренней поверхности стен печи рассчитывалась по уравнению (6.22).

Полученные результаты представлены на рис. 6.3 сплошными линиями. На рисунке видно, что внутренняя поверхность стен печи при попадании под слой материала испытывает значительные температурные скачки, достигающие 150...200 К.

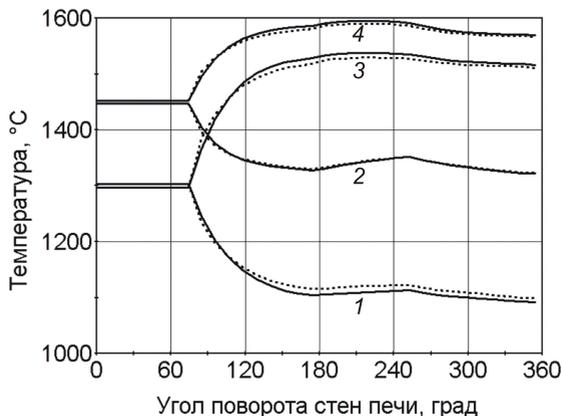


Рис. 6.3. Изменение температуры поверхности клинкерной обмазки после выхода стен из-под слоя клинкера: линии – по формуле (6.22), пунктир – по (6.17)

Кривые 1 и 3 построены для тех поперечных сечений печи, в которых температура клинкера приблизительно равна 1300 °С, в то время как кривые 2 и 4 относятся к поперечным сечениям печи, где температура клинкера близка к 1450 °С. Так как слой клинкера, перемещаясь вдоль печи, сначала нагревается в зоне спекания, а затем, охлаждается, то выбранные значения его температуры соответствуют четырем поперечным сечениям. После выхода из-под слоя клинкера в зоне его спекания поверхность стен печи нагревается газами до температуры большей, чем температура клинкера, а в зоне охлаждения температура поверхности стен, обтекаемых газами, становится ниже температуры слоя клинкера.

Достоверность вычисления температуры по упрощенной аналитической модели проверена дополнительным численным

решением дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в стенах печи при сохранении неизменным температурного поля в газообразной среде, что позволило ввести более точную величину плотности потока отводимой теплоты  $q_{ст}$  в уравнение баланса тепловых потоков (6.17). Значения температуры на поверхности клинкерной обмазки стен, полученные по дифференциальному уравнению нестационарной теплопроводности, представлены на рис. 6.3 пунктирными линиями.

Как следует из рис. 6.3, в каждом рассмотренном случае уточненные и приближенные значения температуры, отложенные соответственно на пунктирных и сплошных кривых, близки друг к другу. Отклонение сплошных линий от пунктирных составляет, как правило, менее 10 К, что подтверждает адекватность упрощенного аналитического подхода к вычислению нестационарной температуры стен в пределах погрешности, допустимой в инженерных расчетах.

Температурное поле в стенах вращающейся печи найдено численным решением дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности с достаточно высокой точностью. Кривые 1 – 6 на рис. 6.4 иллюстрируют характер распределения температуры внутри слоя клинкерной обмазки, образующего внутреннюю, наиболее нагретую часть стены.

В зоне охлаждения (см. рис. 6.4, а) поверхностные слои стен, вступая в контакт с газообразной средой, температура которой ниже температуры клинкера, постепенно охлаждаются (кривые 1 – 3), а попав под слой клинкера, соответственно нагреваются (пунктирные кривые 4 – 6). Наоборот, в зоне спекания (см. рис. 6.4, б), где температура газов выше температуры клинкера, поверхностные слои стен после выхода из-под обжигаемого слоя постепенно нагреваются (кривые 1 – 3), а температура стен под слоем клинкера снижается (пунктирные кривые 4 – 6).

При всем многообразии форм температурных кривых на рис. 6.4 нестационарные колебания температуры сосредото-

ны лишь в пределах тонкого поверхностного слоя, ширина которого практически не превышает 12 мм, что составляет менее 5 % толщины стены, принятой в расчете. Температура в остальной части стены при вращении печи остается неизменной.

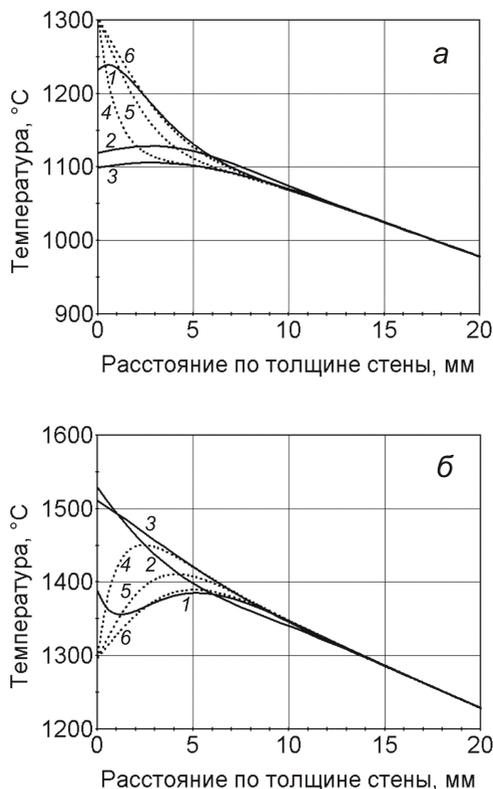


Рис. 6.4. Температура стен вращающейся печи в различные моменты времени в зонах охлаждения (а) и спекания (б): 1 – 3 – в контакте с газами, 4 – 6 – под слоем клинкера

## § 8. Оценка точности математической модели

Уточненные уравнения и теоретические положения радиационно-конвективного теплообмена в селективно поглощающей газообразной среде прошли проверку сопоставлением результа-

тов численного моделирования с экспериментальными данными Тамониса [30], представленными на рис. 6.5.

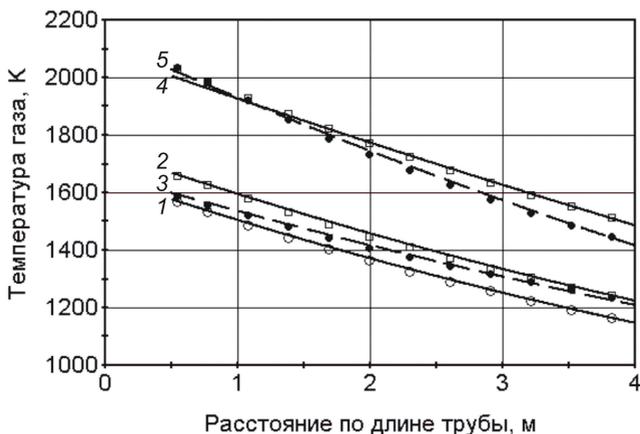


Рис. 6.5. Температура на оси экспериментального участка трубы при расходе газов: 1 – 473, 2 – 570, 3 – 720, 4 – 839, 5 – 511 кг/ч точки – эксперимент [30]; линии – численное моделирование;

В экспериментальной трубе диаметром 150 мм, длиной 4 м охлаждался высокотемпературный газовый поток, содержащий разные объемные доли трехатомных газов. Группа экспериментальных точек вдоль кривых 1 – 3 на рис. 6.5 получена в [30] при относительно низком содержании углекислого газа (5 и 6 %) и водяного пара (11 и 12 %). Группа экспериментальных точек вдоль кривых 4 и 5 соответствует более высокой температуре газового потока и повышенному содержанию углекислого газа (9 %) и водяного пара (17 и 18 %). В первой группе экспериментов значительное место занимал конвективный теплоперенос, во второй группе роль радиационного теплообмена возростала.

Подробности движения и охлаждения газового потока перед экспериментальной трубой в [30] строго не определены, но отмечается, что теплообмен в экспериментальном участке близок к стабилизированному состоянию, при котором, как известно,

завершается формирование динамического и теплового пограничного слоя. В связи с этим в математической модели, для более полного соответствия экспериментальной установке, предусмотрен предвключенный двухметровый охлаждаемый участок трубы, по длине которого формируется пограничный слой в условиях теплообмена при нестабилизированном движении газов.

Сопоставление на рис. 6.5 расчетных кривых с точками, представляющими данные экспериментов, показывает, как правило, их хорошее соответствие друг другу на экспериментальном участке трубы. Особенно важно совпадение углов наклона расчетных и экспериментальных зависимостей, свидетельствующее об одинаковой скорости охлаждения газового потока по длине трубы и, следовательно, об одинаковой интенсивности теплоотдачи к стенкам в экспериментах и в расчете.

Компьютерное моделирование показало также, что на точность расчетных результатов влияет принятый шаг сетки. Зависимость от размеров сетки удалось заметно ослабить выбором подходящего значения турбулентного числа Прандтля  $Pr_T$  в граничных условиях (4.28) конвективного теплопереноса.

Турбулентное число Прандтля  $Pr_T$  в математической модели теплообмена приравнивалось к единице при безразмерном расстоянии от стенки до  $y_+ = 30$  и принималось равным 0,85 при  $y_+ > 60$ . В области  $30 < y_+ < 60$  предполагалось линейное изменение турбулентного числа Прандтля. Уточненный алгоритм позволил увеличивать шаг сетки по радиусу трубы от 1 до 5 мм без существенного изменения результатов численного моделирования теплоотдачи на экспериментальном участке трубы.

Подобренные здесь эмпирическим способом расчетные значения турбулентного числа Прандтля могут в какой-то мере совпадать с реальным изменением этой физической величины вблизи стенки, обтекаемой газами. В качестве примера на рис. 6.6 показаны экспериментальные данные [52] по обтеканию пластины сверхзвуковым потоком газа, приведенные в [53].

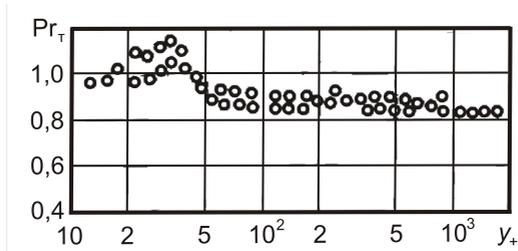


Рис. 6.6. Изменение турбулентного числа Прандтля [52] в пограничном слое при сверхзвуковом обтекании пластины:  
 $y_+$  – безразмерное расстояние по нормали к пластине

Количество движения, переносимое турбулентными вихрями, частично затрачивается на образование структуры более мелких вихрей, в то время как перенос этими же вихрями тепловой энергии происходит с меньшими ее потерями. Этим, возможно, объясняется, почему турбулентное число Прандтля вдали от обтекаемой поверхности меньше единицы. В буферном подслое образование вторичных турбулентных вихрей приглушается, а в вязком подслое практически прекращается, что, по видимому, и приводит к повышению турбулентного числа Прандтля вблизи стенки.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных дало возможность дополнительно проверить роль диффузионных поправок  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  и  $\Delta w$ , наличие которых в свободных членах дискретных уравнений (2.13), (2.15) и (2.16) усложняет алгоритм и в какой-то мере затрудняет сходимость итераций. Влияние диффузионных поправок на расчетную теплоотдачу газового потока оказалось достаточно малым, что позволило вводить их в программный алгоритм только в тех случаях, когда требовалась повышенная точность численного моделирования.

## Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА

### § 1. Дифференциальные уравнения переноса массы

Для математического описания процессов массообмена применяется фундаментальный закон сохранения количества вещества и массы отдельных компонентов жидкой или газообразной среды. С помощью закона сохранения определяют неизвестную функцию, характеризующую поле сохраняемой физической величины, например ее массовую концентрацию  $c_i$ :

$$\frac{\partial \rho c_i}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{m}_i^{\text{кон}} + \operatorname{div} \mathbf{m}_i^{\text{диф}} = M_i, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{m}_i$  – вектор плотности потока массы  $i$ -го компонента;  $\rho$  – плотность среды;  $\tau$  – время;  $M_i$  – источник массы  $i$ -го компонента в расчете на единицу объема и единицу времени;  $\operatorname{div}$  – символ математической операции дивергенции; верхние индексы обозначают способы переноса сохраняемой величины: "кон" – конвекцией, "диф" – диффузией.

Перенос массы конвекцией осуществляется движущимися объемами сплошной среды в соответствии с равенством (1.5):

$$\mathbf{m}_i^{\text{кон}} = \rho \mathbf{v} c_i, \quad (7.2)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $c_i$  – массовая концентрация  $i$ -го компонента в газовой или жидкой смеси.

Математическое описание переноса диффузионного типа имеет градиентную форму равенства (1.6):

$$\mathbf{m}_i^{\text{диф}} = -\rho D_{\text{эф}} \operatorname{grad} c_i, \quad (7.3)$$

где  $D_{\text{эф}}$  – эффективный коэффициент совместной молекулярной и турбулентной диффузии газообразной или жидкой среды.

Дивергенция вектора  $\mathbf{m}$  представляет собой приведенную к единице объема разность между массой  $i$ -го компонента, вышедшей из элементарного объема и вошедшей в него за единицу времени. В цилиндрических координатах  $(x, r, \varphi)$  дивергенция

вектора плотности потока массы  $\mathbf{m}_i$  какого-либо компонента смеси выражается, в соответствии с математическим определением дивергенции вектора (1.19), следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{m}_i = \frac{\partial m_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial r m_{ir}}{r \partial r} + \frac{\partial m_{i\varphi}}{r \partial \varphi},$$

где  $m_{ix}$ ,  $m_{ir}$ ,  $m_{i\varphi}$  – проекции вектора  $\mathbf{m}_i$  на соответствующие оси координат  $x$ ,  $r$ ,  $\varphi$ .

Подставляя в равенство (7.1) математическое выражение дивергенции, а затем и законы переноса (7.2) и (7.3), получают дифференциальное уравнение переноса массы  $i$ -го компонента в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho c_i}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho v) c_i}{\partial x} + \frac{\partial r (\rho v) c_i}{r \partial r} + \frac{\partial (\rho w) c_i}{r \partial \varphi} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho D_{эф} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \rho D_{эф} \frac{\partial c_i}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( \rho D_{эф} \frac{\partial c_i}{r \partial \varphi} \right) = M_i, \quad (7.4) \end{aligned}$$

где  $(\rho v)$ ,  $(\rho v)$ ,  $(\rho w)$  – продольная, радиальная и окружная составляющие вектора массовой скорости, направленные по осям  $x$ ,  $r$  и  $\varphi$  соответственно.

Значения компонент массовой скорости  $(\rho v)$ ,  $(\rho v)$  и  $(\rho w)$  должны быть найдены, как правило, путем численного решения дифференциальных уравнений движения. Эффективный коэффициент диффузии определяется по формуле, подобной выражению (4.18) в уравнениях турбулентного переноса теплоты:

$$D_{эф} = \frac{v}{Sc} + \frac{v_T}{Sc_T} \approx \frac{v_T}{Sc_T}, \quad (7.5)$$

где  $Sc$  – число подобия Шмидта ( $Sc \equiv v/D$ );  $Sc_T$  – турбулентное число Шмидта ( $Sc_T \equiv v_T/D_T$ ).

Так как механизмы переноса массы и теплоты турбулентными вихрями одинаковы, есть все основания присваивать тур-

булентным числам Шмидта и Прандтля одинаковые значения, лежащие чаще всего в диапазоне от 0,8 до 1.

Для получения однозначного решения дифференциального уравнения (7.4) необходимо в конкретной задаче численного моделирования поставить граничные условия, определив значения искомой функции на границах расчетной области. В частности, должен быть задан состав веществ, подаваемых в установку. Стены, ограждающие область моделирования, как правило, непроницаемы для жидкой и газообразной среды, что позволяет на их поверхности приравнять к нулю одностороннюю производную от расчетной концентрации. При достаточно высокой скорости в выходном сечении функция от сеточного числа Пекле (1.18) приводит к нулю коэффициент в дискретном уравнении, связывающий между собой концентрацию компонента смеси внутри и вне расчетной области.

Несколько более сложными оказываются математические модели массопереноса при горении природного газа в диффузионном факеле, который обычно образуется при отдельной подаче воздуха и газообразного топлива, в промышленную печь. Интенсивность диффузионного горения зависит в основном от того, насколько быстро осуществляется турбулентное смешение топлива с воздухом.

Принято считать, что в диффузионном факеле химические реакции протекают настолько быстро по сравнению с более медленной турбулентной диффузией, что скорость собственно химического реагирования практически не влияет на размеры области горения. Таким образом, появляется принципиальная возможность изучать процессы диффузионного горения с помощью известных дифференциальных уравнений переноса вещества, количества движения и энергии, не рассматривая в математической модели достаточно сложную кинетику неравновесных цепных химических реакций окисления горючих составляющих топлива.

## § 2. Структура диффузионного факела

Размеры диффузионного факела зависят от интенсивности и полноты сгорания топлива. Количественная оценка содержания несгоревшего топлива в различных сечениях по длине факела выполняется при помощи массовой концентрации  $c_T$ , представляющей собой локальную массовую долю топлива в газообразной среде факела. Аналогично определяются массовые концентрации воздуха  $c_B$  и продуктов горения  $c_{ПГ}$  как локальные массовые доли воздуха или продуктов горения в газообразной среде факела. Обычно сумма массовых концентраций топлива  $c_T$ , воздуха  $c_B$  и продуктов горения  $c_{ПГ}$  в любой точке факела равна единице.

Газообразное топливо, вылетающее из сопла горелки, вовлекает в движение окружающий воздух и создает турбулентную струю. Свободная турбулентная струя в неограниченном воздушном пространстве обычно имеет вид конуса с углом раскрытия границ струи около  $25^\circ$ , как показано на рис. 7.1. Вершина этого конуса  $P$ , называемая полюсом струи, находится на расстоянии  $x_0$  от выходного отверстия горелки.

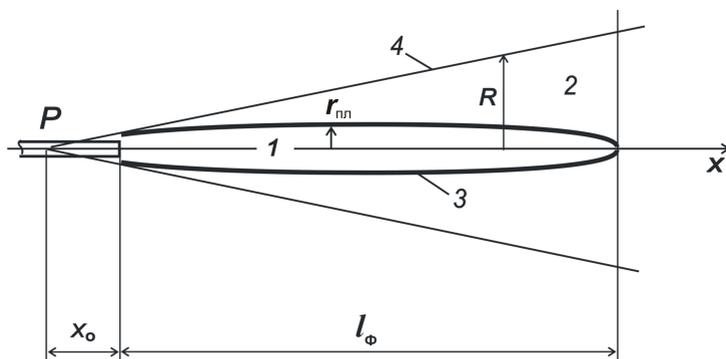


Рис. 7.1. Структура диффузионного факела: 1 – внутренняя область; 2 – внешняя область; 3 – фронт пламени; 4 – границы турбулентной струи;  $R$  – радиус границ струи;  $r_{пл}$  – радиус фронта пламени;  $l_\phi$  – длина факела

Если струя не тормозится стенами печи, развиваясь, например, в неограниченном воздушном пространстве, то поток количества движения  $\Delta J_{\text{стр}}$  через ее поперечные сечения остается постоянным. Массовый расход газообразной среды через поперечные сечения струи постепенно возрастает по ее длине, а ее продольная скорость уменьшается в соответствии с законом сохранения количества движения.

Когда крутка топлива или воздуха отсутствует, образуется прямоточный диффузионный факел. В пределах турбулентной струи с границами 4 в нем можно выделить две области (см. рис. 7.1). В области 1, расположенной во внутренней приосевой части струи, концентрация воздуха  $c_v$  равна нулю, и газообразная среда состоит только из топлива и продуктов горения. В области 2, расположенной во внешней части струи, концентрация топлива  $c_t$  равна нулю, и газообразная среда состоит из воздуха и продуктов горения. Эти области разделены фронтом пламени 3, по направлению к которому диффундируют топливо из внутренней области 1 и воздух из внешней области 2 струи.

При контакте горючих компонентов топлива с кислородом воздуха на фронте пламени практически мгновенно протекают химические реакции, сопровождающиеся выделением тепла. Вследствие турбулентных пульсаций отдельные участки фронта пламени непрерывно колеблются относительно их осредненного положения 3, так что образуется достаточно широкая область химических реакций, в которой продукты горения имеют наивысшую температуру. Условно фронтом пламени будем называть геометрическую поверхность, усредняющую в турбулентном потоке положение зоны химических реакций.

Так как скорость химических реакций много больше скорости турбулентной диффузии, можно считать, что концентрации топлива  $c_t^{nn}$  и воздуха  $c_v^{nn}$  на фронте пламени равны нулю. В конце факела в том поперечном сечении, где фронт пламени пересекает ось струи, концентрация топлива  $c_t^{\phi}$  также равна

нулю ( $c_r^{\phi} = c_r^{nl} = 0$ ). Расстояние от топливного сопла до этого сечения составляет расчетную длину диффузионного факела  $l_{\phi}$  (см. рис. 7.1).

Попытки применить гидродинамическую теорию струйного течения к расчету длины диффузионного факела ранее предпринимались неоднократно [54, 55], но в каждом случае для получения достоверного результата приходилось теоретический анализ процесса дополнять экспериментальными соотношениями. Возможность свести к минимуму использование эксперимента при построении аналитической теории диффузионного факела появилась после теоретического решения Шлихтингом задачи о распределении скорости в свободной струе круглого поперечного сечения [56]. На основе теории струйного течения удалось получить формулы для расчета не только длины факела, но и некоторых других важных характеристик области горения. Несмотря на это, аналитическая теория диффузионного факела в настоящее время является приближенной и может применяться лишь для ориентировочной оценки интенсивности горения газообразного топлива в прямооточной турбулентной струе без учета влияния силы тяжести.

### **§ 3. Основы теории струйного течения**

В [56] рассматривалась идеализированная затопленная струя круглого поперечного сечения, которая, могла образоваться в результате дозвукового истечения газа в неограниченную однородную неподвижную среду из малого отверстия, расположенного в начальной точке (полюсе) струи. Движение вязкого газа в струе подчинялось дифференциальным уравнениям Навье–Стокса в приближении пограничного слоя и уравнению неразрывности.

Аналитическое решение дифференциальных уравнений, полученное Шлихтингом, предлагает следующее выражение для продольной компоненты скорости  $u$ , направленной вдоль оси  $x$ :

$$u = \frac{3\Delta J_{\text{стр}}}{8\pi\rho\nu x (1 + \eta^2)^2}, \quad (7.6)$$

где  $\Delta J_{\text{стр}}$  – поток количества движения через поперечное сечение струи;  $\rho$  – плотность среды;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\eta$  – безразмерная координата по радиусу струи  $r$ ,

$$\eta = \frac{r}{8\nu x} \sqrt{\frac{3\Delta J_{\text{стр}}}{\pi\rho}}. \quad (7.7)$$

При аналитическом решении задачи плотность среды  $\rho$  и кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  считались заданными постоянными величинами.

Поток количества движения  $\Delta J_{\text{стр}}$  через поперечные сечения свободной струи может быть приближенно определен как произведение массового расхода  $G_0$  на среднюю скорость  $u_0$  вылета газа плотностью  $\rho_0$  из выходного отверстия сопла диаметром  $d_0$ :

$$\Delta J_{\text{стр}} \approx G_0 u_0 = \frac{\pi}{4} \rho_0 u_0^2 d_0^2. \quad (7.8)$$

Теоретическое решение (7.6) Шлихтинг распространил на турбулентные струи, заменив кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  его турбулентным аналогом  $\nu_T$ . Согласно экспериментальным данным [57], коэффициент турбулентной вязкости в центральной части осесимметричной струи можно считать пропорциональным произведению скорости  $u_m$  на оси струи на расстояние  $x$  от полюса до расчетного сечения струи:

$$\nu_T \approx 0,002 u_m x. \quad (7.9)$$

Здесь рассматривается лишь основной участок свободной турбулентной струи, имеющий, в отличие от небольшого начального участка, прямолинейные границы. Прямые, ограничивающие основной участок струи, пересекаются в теоретическом полюсе струи (точка  $P$  на рис. 7.1) на расстоянии  $x_0$  от выходного

отверстия сопла. Вследствие турбулентных пульсаций фактическое положение отдельных участков границы струи непрерывно изменяется во времени, колеблясь относительно конической поверхности, которая и принимается в качестве теоретической границы струи.

Таким образом, появляется возможность использовать теоретическое решение (7.6) для характеристики турбулентного струйного течения, схема которого представлена на рис. 7.2.

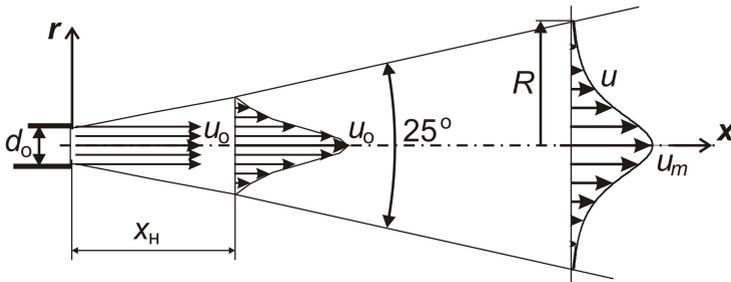


Рис. 7.2. Распределение продольной скорости  $u$  в турбулентной струе:  $x, r$  – координаты;  $d_0$  – диаметр сопла;  $x_H$  – длина начального участка

Для большей определенности начало осей координат  $x$  и  $r$  на рис. 7.2 перенесено из полюса струи  $P$  в выходное сечение сопла, так что в результате расстояние, отсчитываемое от полюса струи, представляется в формулах суммой  $x + x_0$ . После подстановки соотношений (7.8) и (7.9) в уравнения (7.6) и (7.7) математическое выражение для продольной скорости  $u$  примет следующий вид:

$$u = u_m / (1 + \eta^2)^2, \quad (7.10)$$

где  $u_m$  – продольная скорость на оси струи,

$$u_m \approx 6,84 u_0 \frac{d_0}{x + x_0} \sqrt{\rho_0 / \rho}, \quad (7.11)$$

$\eta$  – безразмерная радиальная координата,

$$\eta = 7,9r/(x + x_0). \quad (7.12)$$

Теоретические зависимости (7.10) – (7.12) хорошо совпадают с результатами измерения скорости в турбулентной струе [58]. Некоторое завышение расчетной скорости наблюдается лишь вблизи границ струи. Чтобы компенсировать небольшое отклонение теоретического расхода среды в струе от экспериментального, расчетный угол раскрытия границ струи принят равным  $24^\circ$  (на  $1^\circ$  меньше экспериментально установленного значения); ему соответствует безразмерная координата границы струи  $\eta_{гр} = 1,68$ . Отсюда, при использовании (7.12), получается выражение для расчетного радиуса струи на основном участке:

$$R = 0,212(x + x_0). \quad (7.13)$$

Формула (7.11) теоретического решения задачи позволяет учитывать различие плотности топлива  $\rho_0$ , вытекающего из горелки, и плотности  $\rho$  газообразной среды в струе. Температура среды в факеле после воспламенения топлива значительно увеличивается, в результате турбулентная струя заметно расширяется (см. рис. 7.1). Радиус расширенной струи, соответствующий выходному сечению горелки, обычно находят из уравнения постоянства расхода:

$$R_0 = \frac{d_0}{2} \sqrt{\rho_0/\rho}. \quad (7.14)$$

Если применить равенство (7.13) к выходному сечению сопла горелки при  $x = 0$  и заменить в нем радиус струи  $R_0$  выражением (7.14), то результатом будет оценка расстояния  $x_0$  от выходного отверстия сопла до полюса струи:

$$x_0 \approx 2,36 d_0 \sqrt{\rho_0/\rho}. \quad (7.15)$$

В пределах начального участка скорость на оси струи  $u_m$  сохраняется равной скорости вылета топлива  $u_0$ . В то же время

в переходном поперечном сечении струи в конце начального участка на расстоянии  $x_n$  от сопла должно быть справедливым выражение (7.11). Заменяв в (7.11) величину  $u_m$  скоростью вылета топлива  $u_o$  и величину  $x_o$  выражением (7.15), найдем соотношение, дающее оценку длины начального участка струи, хорошо совпадающую с его экспериментальными значениями:

$$x_n \approx 4,5 d_o \sqrt{\rho_o / \rho} .$$

Полученные здесь приближенные теоретические формулы позволяют достаточно надежно оценить, какое количество воздуха перемещается турбулентной струей при диффузионном горении газообразного топлива.

#### § 4. Транспортирование воздуха турбулентной струей

Под действием сил внутреннего трения на границе струи окружающий ее воздух вовлекается в струйное течение. Массовый расход газообразной среды  $G$  через любое поперечное сечение основного участка струи можно приближенно определить по известному распределению скорости (7.10), условно принимая плотность среды  $\rho$  в рассматриваемом сечении постоянной:

$$G = 2\pi\rho \int_0^R ur \, dr .$$

Интегрирование здесь выполняется после подстановки под знак интеграла выражений (7.10) для скорости  $u$  и (7.12) для радиуса  $r$  при безразмерной координате границы струи  $\eta_{rp} = 1,68$ :

$$G = 2\pi\rho \left( \frac{x+x_o}{7,9} \right)^2 u_m \int_0^{\eta_{rp}} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)^2} = 0,0118 \pi\rho(x+x_o)^2 u_m .$$

Рассматривая условия формирования диффузионного факела, последнее равенство поделим на известное выражение массового расхода  $G_o$  газообразного топлива, вылетающего из сопла горелки со скоростью  $u_o$ ,

$$G_o = \pi \rho_o u_o d_o^2 / 4 .$$

Принимая при этом во внимание формулу (7.11) для скорости  $u_m$  на оси струи, получим в итоге расчетное уравнение для массового расхода газообразной среды через поперечные сечения турбулентной струи:

$$\frac{G}{G_o} = 0,323 \frac{x+x_o}{d_o} \sqrt{\rho/\rho_o} . \quad (7.16)$$

Если принять приближенно, что при  $x = 0$  расчетный массовый расход газообразной среды  $G$  в теоретической струе равен массовому расходу топлива  $G_o$  через выходное отверстие горелки, то из уравнения (7.16) следует формула для расчета массового расхода воздуха, вовлеченного в струйное течение:

$$\frac{G_B}{G_o} = 0,323 \frac{x}{d_o} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_o}} . \quad (7.17)$$

Теоретическое уравнение (7.17) совпадает с точностью до 1 % с зависимостью, установленной экспериментально при струйном смешении с воздухом газов различной плотности (водорода, пропана и углекислого газа) [58], что в целом подтверждает справедливость принятых допущений.

Несмотря на то, что формулы (7.16) и (7.17) получены для изотермической струи, они находят в дальнейшем применение в расчетах параметров диффузионного факела. Чтобы учесть неизотермичность горения, реальная топливовоздушная струя при расчете мысленно заменяется эквивалентной изотермической струей, имеющей ту же транспортирующую способность [59].

## § 5. Размеры диффузионного факела

Топливо и воздух участвуют в химических реакциях горения в количествах, которые определяются их массовым стехиомет-

рическим соотношением  $n_B$ , равным массе воздуха, теоретически необходимой для сжигания 1 кг топлива:

$$n_B = \Delta M_B / \Delta M_T ,$$

где  $\Delta M_B$ ,  $\Delta M_T$  – стехиометрические массы соответственно воздуха и топлива, вступивших в реакции горения.

Расчетной концентрацией в факеле служит величина [60]:

$$C \equiv c_T - c_B / n_B , \quad (7.18)$$

где  $c_T$ ,  $c_B$  – массовые концентрации топлива и воздуха.

Распределение расчетной концентрации  $C$  при диффузионном горении зависит от интенсивности процессов конвективного и турбулентного переноса химических компонентов при смешении топлива с воздухом. За пределами свободной турбулентной струи концентрация воздуха равна единице, и расчетная концентрация имеет следующее значение:

$$C_\infty = -1/n_B .$$

Разность расчетных концентраций в турбулентной струе и за ее границами образует избыточную концентрацию:

$$\Delta C = c_T + (1 - c_B) / n_B . \quad (7.19)$$

За границами турбулентной струи избыточная концентрация равна нулю, а на фронте пламени она обратна стехиометрическому соотношению  $n_B$ :

$$\Delta C_{пл} = 1/n_B . \quad (7.20)$$

Если известно распределение избыточной концентрации  $\Delta C$ , то по формуле (7.19) можно найти концентрацию воздуха во внешней области факела, приняв концентрацию топлива  $c_T$  равной нулю,

$$c_B'' = 1 - \Delta C \cdot n_B . \quad (7.21)$$

Теоретически и экспериментально доказано [61], что при учете особенностей турбулентного переноса распределение из-

быточной концентрации по радиусу турбулентной струи на ее основном участке подобно распределению скорости:

$$\frac{\Delta C}{\Delta C_m} = (u/u_m)^{Sc_\tau},$$

где  $\Delta C_m$  – избыточная концентрация на оси струи;  $Sc_\tau$  – турбулентное число Шмидта, характеризующее отношение интенсивностей турбулентного переноса количества движения и массы.

Подставив в последнее равенство соотношение скоростей по формуле (7.10), найдем приближенное распределение избыточной концентрации в поперечном сечении турбулентной струи:

$$\Delta C \approx \Delta C_m / (1 + \eta^2)^{2Sc_\tau}. \quad (7.22)$$

В конце факела на расстоянии  $l_\phi$  от горелки фронт пламени достигает оси струи (см. рис. 7.1), так что избыточная концентрация на оси становится равной избыточной концентрации на фронте пламени, определяемой равенством (7.20). В таком случае формула (7.22) будет представлять в следующем виде распределение избыточной концентрации  $\Delta C_\phi$  в поперечном сечении турбулентной струи в конце факела на расстоянии от топливного сопла  $x = l_\phi$ :

$$\Delta C_\phi = \frac{1}{n_B (1 + \eta^2)^{2Sc_\tau}}. \quad (7.23)$$

Подстановка в (7.21) выражения (7.23) дает распределение концентрации избыточного, не вступившего в горение воздуха в поперечном сечении струи в конце диффузионного факела:

$$c_B^\phi = 1 - \frac{1}{(1 + \eta^2)^{2Sc_\tau}}. \quad (7.24)$$

Элементарный массовый расход избыточного воздуха через кольцевую площадку  $2\pi r dr$ , выделенную в этом поперечном сечении, определяется следующим выражением:

$$dG_B^\Phi = 2\pi\rho_\Phi u_\Phi c_B^\Phi dr ,$$

где  $\rho_\Phi$  – плотность среды;  $u_\Phi$  – скорость в конце факела.

Замена здесь скорости  $u_\Phi$  правой частью формулы (7.10) и концентрации воздуха  $c_B^\Phi$  выражением (7.24) приводит к следующему равенству:

$$dG_B^\Phi = 2\pi\rho_\Phi u_m^\Phi \left( \frac{l_\Phi + x_o}{7,9} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{(1+\eta^2)^{2Sc_T}} \right) \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)^2} .$$

Интегрирование элементарного расхода  $dG_B^\Phi$  избыточного воздуха в конце факела по полному поперечному сечению струи выполняется при постоянной плотности  $\rho_\Phi$ , безразмерной координате границы струи  $\eta_{гр} = 1,68$  и скорости на оси струи в конце факела  $u_m^\Phi$ , определяемой равенством (1.11):

$$G_B^\Phi = \frac{6,84}{7,9^2} \pi\rho_\Phi u_o d_o (l_\Phi + x_o) \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_\Phi}} \left\{ 0,735 - \frac{1}{2Sc_T + 1} \left[ 1 - \frac{1}{(1+1,68^2)^{2Sc_T + 1}} \right] \right\} .$$

Выражение в квадратных скобках слабо зависит от турбулентного числа Шмидта. Приняв это число, например, равным 0,8, можно ввести в правую часть равенства величину массового расхода газообразной среды в конце факела  $G_\Phi$ , используя формулу (7.16):

$$G_B^\Phi = G_\Phi \left\{ 1 - \frac{1,32}{2Sc_T + 1} \right\} . \quad (7.25)$$

Массовый расход воздуха  $G_B^{гор}$  на горение, включая его избыточную часть, подаваемую в область горения, следует из материального баланса диффузионного факела:

$$G_B^{гор} = G_o n_B + G_B^\Phi .$$

Подстановка выражения (7.25) вводит величину расхода воздуха также и в правую часть этого равенства:

$$G_B^{\text{гор}} = G_o n_B + (G_o + G_B^{\text{гор}}) \left\{ 1 - \frac{1,32}{2Sc_T + 1} \right\},$$

После элементарных преобразований получим соотношение:

$$\frac{G_B^{\text{гор}}}{G_o} = \frac{2Sc_T + 1}{1,32} (n_B + 1) - 1. \quad (7.26)$$

Выражение для длины факела определится, если расход воздуха на горение приравнять к массовому расходу воздуха, вовлеченного в струйное движение на длине факела  $l_\Phi$ . Из равенства правых частей уравнений (7.26) и (7.17) следует формула для расчета длины диффузионного факела в свободной турбулентной струе:

$$\frac{l_\Phi}{d_o} = 3,1 \left[ \frac{2Sc_T + 1}{1,32} (n_B + 1) - 1 \right] \sqrt{\frac{\rho_o}{\langle \rho_\Phi \rangle}}. \quad (7.27)$$

Чтобы иметь возможность учесть неизотермичность факела, в формулу введена средняя плотность  $\langle \rho_\Phi \rangle$  газообразной среды в поперечных сечениях струи по длине факела. Можно упростить запись этой формулы, приняв  $Sc_T \approx 0,82$ , что близко к среднему значению турбулентного числа Шмидта в струях:

$$\frac{l_\Phi}{d_o} = 3,1 (2n_B + 1) \sqrt{\frac{\rho_o}{\langle \rho_\Phi \rangle}}. \quad (7.28)$$

Хотя формула (7.28) имеет простой вид, вывод ее хорошо обоснован теоретически и выполнен с минимальными допущениями. С помощью стехиометрического соотношения  $n_B$  она учитывает зависимость длины диффузионного факела от состава топлива. Соотношение плотностей позволяет применять эту формулу для оценки длины неизотермического факела.

За исключением небольшого начального участка, избыточная концентрация на оси осесимметричной струи уменьшается

обратно пропорционально расстоянию от сопла, так что становится справедливым приближенное равенство:

$$\Delta C_m(x + x_o) \approx \text{const},$$

из которого следует следующее соотношение:

$$\frac{\Delta C_m}{\Delta C_{пл}} \approx \frac{l_\phi + x_o}{x + x_o}.$$

При его учете в формуле (7.22) получаем приближенную формулу для оценки безразмерного расстояния  $\eta_{пл}$  от оси диффузионного факела до фронта пламени:

$$\eta_{пл} \approx \sqrt{\left(\frac{l_\phi + x_o}{x + x_o}\right)^{1/(2Sc_T)} - 1}. \quad (7.29)$$

Теперь по безразмерной величине  $\eta_{пл}$  и соотношению (7.12) становится возможным найти расстояние  $r_{пл}$  по радиусу от оси струи до фронта пламени в поперечных сечениях диффузионного факела. Вычисления показывают, что диффузионный прямоточный факел имеет вытянутую вдоль оси форму фронта пламени (см. рис. 7.1) в тех случаях, когда неизотермичностью и воздействием выталкивающей силы можно пренебречь.

## § 6. Диффузионный факел во вращающейся печи

Вращающаяся печь может служить адекватным объектом для применения аналитической теории к диффузионному факелу, формируемому в эксплуатационных условиях. Отличительные особенности диффузионного горения в этом случае объясняются ограничением турбулентной струи цилиндрическими стенками печи при заданном соотношении объемных расходов топлива и воздуха. Коэффициент избытка воздуха при горении природного газа во вращающейся печи имеет приблизительное значение  $\alpha_B \approx 1,1$ , что соответствует 10 % избыточного воздуха от его объема, теоретически необходимого для горения.

При небольшом избытке воздуха, подаваемого на горение, диффузионный факел во вращающейся печи целесообразно разделить по длине на две части, как показано на рис. 7.3. Участок струйного течения занимает часть длины факела от горелки до поперечного сечения, в котором границы турбулентной струи достигают стен печи. Оставшаяся часть факела образует участок завершения горения, на котором локальные избытки воздуха приближаются к минимальному значению.

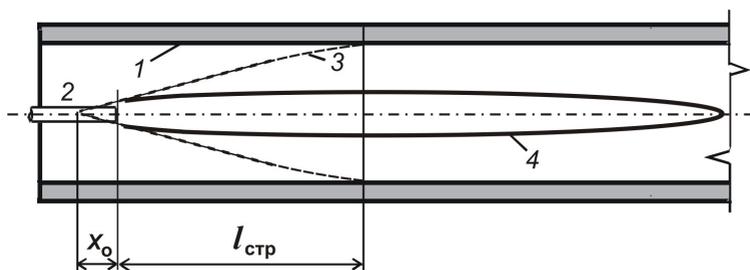


Рис. 7.3. Диффузионное горение природного газа во вращающейся печи:  
 1 – футеровка стен; 2 – горелка; 3 – граница струи; 4 – фронт пламени;  
 $x_0$  – расстояние до полюса струи;  $l_{стр}$  – длина струйного участка факела

На первом участке подаваемый в печь горячий воздух вовлекается в движение струи и частично сгорает на фронте пламени. На втором участке в реакции горения вступают остаток топлива и воздух, вовлеченный в движение турбулентной струи ранее на участке струйного течения.

Очевидно, что на участке завершения горения концентрация воздуха ниже, чем при диффузионном горении в свободной неограниченной струе, вследствие чего вероятность контакта кислорода с горючими компонентами топлива уменьшается, а длина диффузионного факела становится больше теоретической. Поэтому формула (7.28) может служить лишь для приближенной оценки минимальной длины прямого диффузионного факела.

Массовое стехиометрическое соотношение  $n_b$  при горении природного газа находится обычно в интервале от 16 до 17, так что в этом частном случае формула (7.28) сводится к следующей приближенной зависимости:

$$\frac{l_{\phi}}{d_o} \approx 105 \sqrt{\rho_o / \langle \rho_{\phi} \rangle}.$$

Соотношение плотности продуктов горения, занимающих основную часть факела, и плотности природного газа при нормальных условиях примем примерно равным 1,67. Если условиться, что средняя температура газообразной среды в факеле вращающейся печи составляет 1550 °С, то формула (7.28) превратится в простое равенство, позволяющее давать оценку минимальной длины диффузионного факела при горении природного газа во вращающейся печи:

$$l_{\phi} \approx 210 d_o.$$

Пожалуй, основное преимущество аналитической зависимости заключается в том, что она наглядно представляет влияние разных параметров на результат расчета. В частности, из формулы (7.28) следует, что при горении природного газа длина диффузионного факела возрастает при увеличении диаметра топливного сопла  $d_o$  и, в меньшей степени, при снижении средней плотности  $\langle \rho_{\phi} \rangle$  газообразной среды в факеле. Плотность газообразной среды, в свою очередь, обратно пропорциональна термодинамической температуре, так что повышение средней температуры горения  $t_{\phi}$  приводит к некоторому удлинению прямоточного факела.

Скорость вылета природного газа из горелки влияет на длину диффузионного факела косвенно и по-разному в зависимости от того, чем было вызвано это изменение скорости. Увеличение скорости  $u_o$  вылета топлива при постоянном его расходе за счет уменьшения диаметра сопла  $d_o$  приводит к образова-

нию более короткого факела. Этот результат объясняется повышением градиента скорости, что вызывает возрастание турбулентной вязкости в газовой среде диффузионного факела и, следовательно, более интенсивное турбулентное смешение топлива с воздухом.

Наоборот, факел несколько удлинится с увеличением скорости вылета топлива  $u_0$  при неизменном диаметре топливного сопла  $d_0$ , так как при этом увеличивается расход топлива, повышается тепловыделение в объеме факела, возрастает температура и, следовательно, снижается средняя плотность  $\langle \rho_{\text{ф}} \rangle$  газообразной среды в факеле.

Несмотря на соответствие теоретических зависимостей эксперименту и эксплуатационным наблюдениям, аналитическая теория диффузионного факела применима лишь к наиболее простым условиям горения газообразного топлива. Поэтому, в конечном счете, она не может служить основой для достаточно полного и разностороннего численного исследования процессов горения и тепломассообмена в промышленных печах и топках. Несомненно, что основное внимание следует уделять более универсальным численным методам математического моделирования процессов переноса в газообразной среде.

## § 7. Математическая модель диффузионного факела

Дифференциальное уравнение переноса массы газообразного топлива в стационарных условиях представляет собой частный случай уравнения массопереноса общего вида (7.4):

$$\frac{\partial(\rho u)c_T}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho v)c_T}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho w)c_T}{r\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_{\text{эф}} \frac{\partial c_T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho D_{\text{эф}} \frac{\partial c_T}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho D_{\text{эф}} \frac{\partial c_T}{\partial \varphi}\right) = -M_T, \quad (7.30)$$

где  $c_T$  – массовая концентрация топлива;  $(\rho u)$ ,  $(\rho v)$ ,  $(\rho w)$  – продольная, радиальная и окружная составляющие вектора массовой скорости, направленные по осям  $x$ ,  $r$  и  $\varphi$  соответственно;  $M_T$  – масса сгоревшего топлива в расчете на единицу объема и единицу времени.

Аналогичное уравнение переноса массы воздуха имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho u)c_B}{\partial x} + \frac{\partial r(\rho v)c_B}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho w)c_B}{r\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_{эф} \frac{\partial c_B}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\rho D_{эф} \frac{\partial c_B}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\rho D_{эф} \frac{\partial c_B}{r\partial\varphi}\right) = -M_B, \quad (7.31)$$

где  $c_B$  – массовая концентрация воздуха;  $M_B$  – масса воздуха, вступившего в реакции горения, приходящаяся на единицу объема и единицу времени.

Вычитая из (7.30) уравнение (7.31), деленное на стехиометрическое отношение  $n_B$ , получают дифференциальное уравнение переноса для расчетной ("восстановленной") концентрации  $C$ , определяемой соотношением (7.18):

$$\frac{\partial(\rho u)C}{\partial x} + \frac{\partial r(\rho v)C}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho w)C}{r\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_{эф} \frac{\partial C}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{r\partial r}\left(r\rho D_{эф} \frac{\partial C}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\rho D_{эф} \frac{\partial C}{r\partial\varphi}\right) = 0. \quad (7.32)$$

Таким образом, основной составляющей математической модели диффузионного факела становится дифференциальное уравнение (7.32) для расчетной концентрации  $C$ . При его численном решении отпадает необходимость вычисления "источника" массы топлива или воздуха, величина которых при диффузионном горении неизвестна.

Дискретный аналог дифференциального уравнения (7.32) получим, применив к стационарному процессу переноса массы

общую форму (1.21) записи дискретного уравнения в цилиндрических координатах:

$$a_P C_P = a_W C_W + a_E C_E + a_S C_S + a_N C_N + a_B C_B + a_T C_T. \quad (7.33)$$

В коэффициентах дискретного уравнения (7.33) интенсивность диффузионного переноса представлена упрощенно в соответствии с приближенным равенством (7.5):

$$a_W = \frac{(\mu_T / Sc_T)_w}{\Delta x^2} f(Pe_w) + \frac{\rho_w}{\Delta x} \max(u_w, 0),$$

$$a_E = \frac{(\mu_T / Sc_T)_e}{\Delta x^2} f(Pe_e) + \frac{\rho_e}{\Delta x} \max(-u_e, 0),$$

$$a_S = \left[ \frac{(\mu_T / Sc_T)_s}{\Delta r^2} f(Pe_s) + \frac{\rho_s}{\Delta r} \max(v_s, 0) \right] \frac{r_s}{r_p},$$

$$a_N = \left[ \frac{(\mu_T / Sc_T)_n}{\Delta r^2} f(Pe_n) + \frac{\rho_n}{\Delta r} \max(-v_n, 0) \right] \frac{r_n}{r_p},$$

$$a_B = \frac{(\mu_T / Sc_T)_b}{r_p^2 \Delta \varphi^2} f(Pe_b) + \frac{\rho_b}{r_p \Delta \varphi} \max(w_b, 0),$$

$$a_T = \frac{(\mu_T / Sc_T)_t}{r_p^2 \Delta \varphi^2} f(Pe_t) + \frac{\rho_t}{r_p \Delta \varphi} \max(-w_t, 0),$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T.$$

Формула (7.18) дает возможность найти распределение концентрации топлива и воздуха в расчетной области по известным значениям расчетной концентрации. Там, где расчетная концентрация  $C$  положительна, достаточно приравнять к ней концентрацию топлива ( $c_T = C$ ). Там, где расчетная концентрация отрицательна, концентрация топлива  $c_T$  равна нулю, и тогда из соотношения (7.18) следует выражение, определяющее концентрацию воздуха:

$$c_B = -C n_B.$$

На стыке областей с положительными и отрицательными значениями расчетной концентрации лежит фронт пламени, в котором сосредоточены химические реакции диффузионного горения, завершающиеся выделением теплоты. Чтобы определить величину тепловыделения  $Q_V$  в источниковых членах дифференциальных уравнений переноса теплоты (4.17), (6.5) и (6.6), необходимо найти "источник" массы топлива ( $-M_T$ ). Для этой цели предлагается использовать следующий дискретный аналог дифференциального уравнения (7.30), в правую часть которого подставляются значения массовой концентрации топлива  $c_T$ , вычисленные в текущей итерации:

$$M_T = \left[ a_W(c_T)_W + a_E(c_T)_E + a_S(c_T)_S + a_N(c_T)_N + a_B(c_T)_B + a_T(c_T)_T \right] - a_P(c_T)_P. \quad (7.34)$$

Здесь коэффициенты  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$ ,  $a_N$ ,  $a_B$ ,  $a_T$  имеют те же значения, что и в дискретном уравнении (7.33).

Далее по известной формуле вычисляется величина тепловыделения  $Q_V$ , Вт/м<sup>3</sup>, распределенного по фронту пламени:

$$Q_V = M_T Q_H^p / \rho_T,$$

где  $Q_H^p$  – низшая теплота сгорания топлива, Дж/м<sup>3</sup>;  $M_T$  – масса сгоревшего топлива, кг/(м<sup>3</sup>·с);  $\rho_T$  – плотность топлива, кг/м<sup>3</sup>.

## § 8. Вопросы моделирования кинетики горения

Рассмотренные математические модели диффузионного факела построены на закономерностях массопереноса, что не исключает возможности учета в них физико-химических аспектов собственно процессов горения.

Например, изложенный здесь простейший способ локализации тепловыделения предполагает, что зона экзотермических реакций горения лежит в пределах одного слоя достаточно крупных ячеек сетки, распределенных по фронту пламени. В результате расчетные значения температуры на фронте пламе-

ни в какой-то мере ставятся в зависимость от радиального размера этих ячеек.

Если радиальные шаги построенной сетки намного меньше или же, наоборот, много больше фактической толщины слоя химических реакций, то тепловыделение следует распределять по нескольким смежным рядам расчетных ячеек или же локализовать соответственно в более тонком слое по сравнению с принятым размером ячеек сетки. С этой целью может вычисляться одна из функций плотности вероятности, которыми оперирует современная теория горения [62, 63].

Обычно в коротком диффузионном факеле, формируемом в промышленных печах при достаточном избытке воздуха, природный газ сгорает полностью. Если же горение газообразного топлива осуществляется в удлиненном вялом факеле, то при недостаточно высокой температуре фронта пламени химические реакции могут прерываться. Вычисление скорости химических реакций при горении природного газа является непростой задачей, учитывая, что уже при 300 °С начинается разложение составляющего его метана, а при 1000 °С метан может разлагаться полностью. Разложение метана в высокотемпературной восстановительной среде приводит к образованию мельчайших частиц сажи. Все же возможен приближенный анализ кинетики горения природного газа с помощью базовых закономерностей химического реагирования.

Как известно [63], убыль какого-либо компонента в химической реакции зависит от концентрации исходных реагентов в смеси, так что количество топлива  $\Delta M_T$ , сгоревшего в единице объема за единицу времени, будет пропорционально произведению объемных долей топлива  $p_T$  и окислителя  $p_{ок}$ , взятых в степени, соответствующей порядку химических реакций:

$$\Delta M_T = K_p p_T^a p_{ок}^b,$$

где  $K_p$  – константа равновесия химической реакции.

Это уравнение отражает тенденцию к снижению скорости окислительных реакций в конце диффузионного факела, где концентрации топлива и кислорода вблизи фронта пламени малы. Особенно сильное воздействие на скорость химического взаимодействия окислителя с горючими составляющими топлива оказывает экспоненциальный характер зависимости константы равновесия от температуры по закону Аррениуса:

$$K_p = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (7.35)$$

где  $A$  – коэффициент пропорциональности, величина которого зависит от вида химической реакции;  $E_a$  – энергия активации;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – термодинамическая температура смеси газов.

Альтернативный подход к оценке вероятности прерывания химических реакций реализуется в моделях разрушения вихрей [64], предлагающих математическое описание турбулентного разбиения области несгоревшего топлива на фронте пламени на более мелкие фрагменты. Интенсивные турбулентные пульсации, непрерывно деформирующие поверхность фронта пламени, препятствуют завершению химического взаимодействия компонентов газовой смеси и могут приводить к локальному погасанию пламени. Если топливовоздушная смесь не воспламенится снова, топливо покинет зону реакции несгоревшим [63].

Химическую кинетику и механизм разрушения турбулентных вихрей необходимо учитывать в тех случаях, когда требуется определить величину химического недожога или уточнить химический состав газообразных продуктов, покидающих область горения. Расчет скорости реакций окисления необходим также при численном исследовании образования экологически вредных химических соединений, типа оксидов азота и серы.

Эти и другие особенности математических моделей кинетического горения топлива требуют специального рассмотрения, выходящего за пределы содержания данной монографии.

## **Глава 8. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПРОМЫШЛЕННЫХ ПЕЧАХ**

### **§ 1. Структура математической модели**

Центральное место в математической модели тепловой работы высокотемпературной теплотехнологической установки занимают взаимосвязанные процессы массопереноса, диффузионного горения и радиационно-конвективного теплообмена. Размеры диффузионного факела зависят от интенсивности массообменных процессов смешения топлива с воздухом, в то время, как тепловыделение, сосредоточенное на фронте пламени, существенно повышает температуру факела и радиационную теплоотдачу от газообразной среды к технологическому материалу.

Дифференциальные уравнения диффузионного горения и радиационно-конвективного теплообмена, применяемые в математической модели, учитывают перенос массы и теплоты движущимися газами. В результате необходимой частью математической модели становятся дифференциальные уравнения неразрывности потока и переноса количества движения, определяющие скорость движения газообразной среды во взаимосвязи с полем давления. К ним добавляются дифференциальные уравнения, моделирующие параметры турбулентности. Необходимой частью математической модели являются граничные условия к каждому из дифференциальных уравнений.

Все дифференциальные уравнения и граничные условия к ним приводятся к дискретному виду и решаются численно компьютерной программой. При ее составлении применяется объектно-ориентированное программирование, позволяющее распределять код численного решения дискретных уравнений по классам, соответствующим логическим частям математической модели. Принципиальная структура вычислительной программы представлена на рис. 8.1.

С помощью моделирующих программ, составленных по этой схеме, выполнено исследование диффузионного горения

природного газа и радиационно-конвективного теплообмена в некоторых видах промышленных печей. Полученные расчетные результаты иллюстрируют возможности численной реализации современных математических моделей.

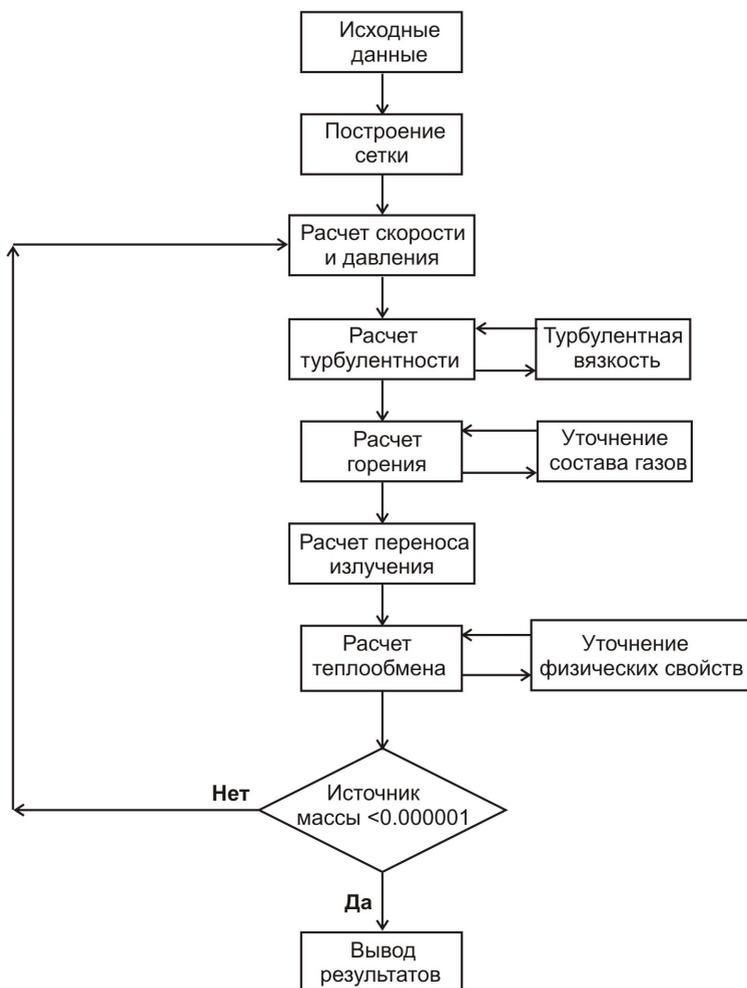


Рис. 8.1. Блок-схема моделирующей компьютерной программы тепломассопереноса в промышленной печи

Численный эксперимент начинался с ввода исходных данных в память компьютера и построения сетки. Затем последовательно выполнялись итерации, в ходе которых в первую очередь рассчитывались взаимосвязанные поля скорости и давления и уточнялись значения коэффициентов турбулентного переноса. В каждой итерации определялись также концентрации топлива и воздуха при диффузионном горении природного газа, температурное поле, тепловые потоки к стенам печи и технологическому материалу.

Сходимость итераций контролировалось главным образом по уменьшению абсолютных значений расчетных источников массы, суммированных по ячейкам сетки, до заданного допустимого значения (обычно до 0,1...1 мг/с в расчете на 1 м<sup>3</sup> области моделирования). Для контроля над тепловыделением в каждой итерации определялась разность между потоками топлива, поступившего в ячейки сетки и вышедшего из них. Количество сгоревшего топлива, полученное суммированием по всем ячейкам сетки, сравнивалось с его общим расчетным расходом. Равенство этих величин с точностью до десятых долей процента обычно достигалось, когда продольные и поперечные размеры ячеек сетки вблизи сопла горелки были примерно одинаковыми.

По завершении итерационного цикла формировались массивы данных, которые по программной команде записывались на жесткий диск компьютера. В компьютерной программе предусмотрено, что сохраненные таким образом результаты вычислений могут выводиться на экран монитора в виде таблиц и наглядных графических изображений, использующих доступную в компьютере палитру цветовых оттенков. При наведении курсора компьютерной "мыши" на графическое изображение на экране монитора появляются координаты положения курсора в любой точке области моделирования и локальные значения наиболее важных расчетных величин (массовых концентраций топлива и воздуха, температуры, давления и скорости среды).

Примером может служить рис. 8.2, на котором представлен вид экрана монитора с изображением диффузионного факела в цементной вращающейся печи.

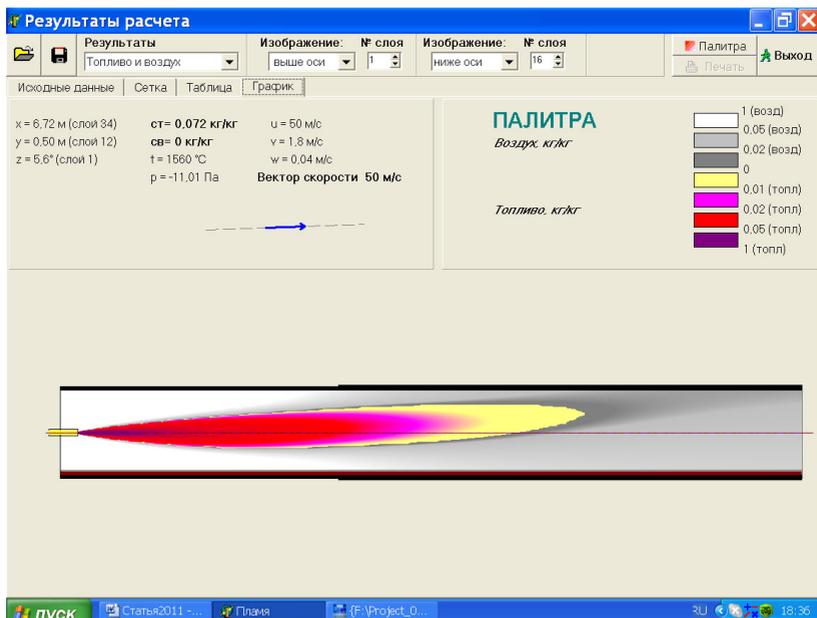


Рис. 8.2. Графическое представление на экране монитора результатов численного моделирования диффузионного горения природного газа во вращающейся печи (скорость вылета топлива 300 м/с)

## § 2. Обжиг цементного клинкера во вращающейся печи

В настоящее время применяются два способа производства цементного клинкера – "мокрый" и "сухой". В производстве клинкера первым из этих способов сырьевая смесь разбавляется водой и подается в виде шлама с влажностью 36...40 % во вращающуюся печь длиной до 180 м. Во втором способе производства сухая, тонко измельченная сырьевая смесь подогревается и подвергается декарбонизации в теплообменниках и кальцинаторе, после чего подается в короткую печь обжига при тем-

пературе порядка 1000 °С. В результате производительность обжиговой вращающейся печи по клинкеру возрастает в два-три раза при меньшем удельном расходе топлива.

В качестве объекта численного моделирования выбрана вращающаяся печь "мокрого" способа производства с диаметром корпуса 5 м при угле 4° и частоте вращения 0,105 рад/с. (1 об/мин). Принято, что внутренняя поверхность стен печи, выполненных из хромомagneзитового кирпича с радиальным размером 230 мм, покрыта слоем затвердевшей клинкерной обмазки толщиной 20 мм, защищающем футеровку от разрушения.

Производительность печи по клинкеру составила 72 т/ч. В согласии с эксплуатационными данными, расчетный расход природного газа с теплотой сгорания 35460 кДж/м<sup>3</sup> принят равным 12200 м<sup>3</sup>/ч при температуре горячего воздуха 410 °С и коэффициенте избытка воздуха 1,1.

Трехмерная математическая модель, построенная в цилиндрической системе координат ( $x, r, \varphi$ ), учитывала наличие в печи слоя обжигаемого материала, скользящего по внутренней поверхности стен печи и заполняющего часть ее поперечного сечения. Обжигаемый слой, близкий по форме к сегменту, моделировался набором дугообразных подслоев, как показано на рис. 8.3. Увеличив их число, можно образовать сравнительно ровную поверхность, контактирующую с газовой средой, такую же, например, как на рис. 6.1.

Численное моделирование выполнялось на участке длиной 40 м в зонах спекания и охлаждения клинкера. Параметры турбулентного движения газообразной среды вычислялись с помощью стандартной двухпараметрической модели турбулентности.

Корректное решение поставленной инженерной задачи потребовало применения сетки с относительно большим числом ее ячеек. Длина расчетного участка печи разделена на 100 слоев, радиусы и окружность печи – на 32 слоя по каждой оси координат. Общее число узлов сетки превысило 100 тысяч.

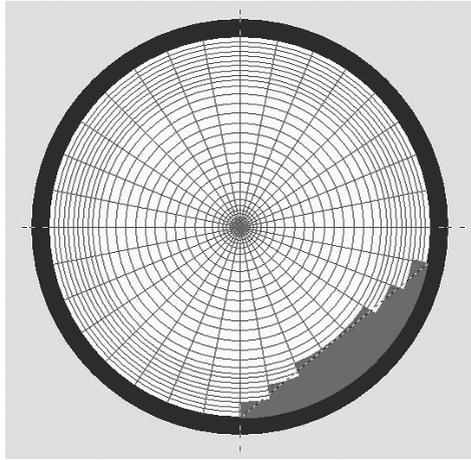


Рис. 8.3. Согласование формы обжигаемого слоя с линиями сетки в поперечном сечении вращающейся печи

На рис. 8.4 показано, что достоверность результатов численного моделирования теплопереноса при диффузионном горении природного газа может быть подтверждена сопоставлением расчетной температуры корпуса вращающейся печи с ее значениями, измеренными в эксплуатационных условиях [65].

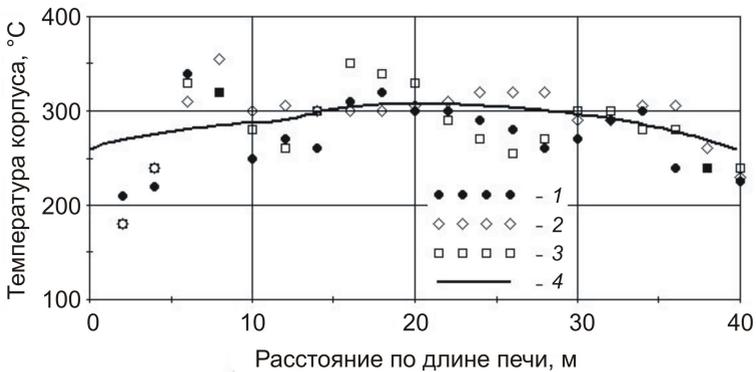


Рис. 8.4. Температура корпуса печей цементного завода: 1 – 3 – номера печей, 4 – численное моделирование

На рис. 8.5 приведены результаты численного исследования теплообмена во вращающейся печи. Кривая 1 представляет среднюю температуру обжигаемого клинкера по длине печи, рассчитанную по его теплоемкости с учетом теплоты плавления [66] в предположении, что в расчетный участок печи поступает полностью декарбонизированная сырьевая смесь с температурой 1000 °С. Продвигаясь вдоль печи навстречу потоку газообразных продуктов горения, сырьевая смесь в зоне спекания нагревается, частично расплавляется и постепенно превращается в цементный клинкер. Максимальная расчетная температура слоя клинкера составила 1592 °С, что позволяет сделать вполне определенный вывод о том, что при работе печи мокрого способа клинкер в зоне спекания может нагреваться значительно выше температуры 1450 °С, необходимой для образования клинкерных минералов.

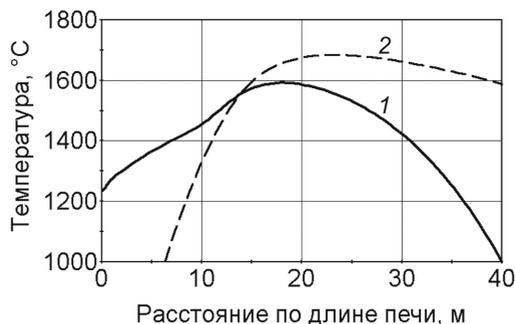


Рис. 8.5. Средняя температура клинкера (1) и газообразной среды (2) в поперечных сечениях печи при скорости вылета топлива 300 м/с

Кривая 2 характеризует среднюю температуру газообразной среды в поперечных сечениях печи. Максимальное ее значение достигает 1685 °С на расстоянии 21 м от горелки. Вблизи горелки средняя температура газообразной среды оказывается меньше температуры обжигаемого слоя, в результате чего на этом участке формируется зона охлаждения клинкера. Расчет-

ная температура клинкера 1235 °С на выходе из печи близка к эксплуатационному значению, что также подтверждает достоверность в целом результатов численного моделирования теплообмена между газами, футеровкой печи и слоем клинкера.

Возможный нагрев слоя клинкера до чрезмерно высокой температуры, отмеченный в численных экспериментах, объясняет многие наблюдения, относящиеся к эксплуатации цементных вращающихся печей большого диаметра при "мокрое" способе производства. Перегрев клинкера в зоне спекания приводит к измельчению клинкерных гранул вплоть до клинкерного пыления, затрудняющего управление печью. При появлении клинкерного пыления ухудшается теплообмен в холодильнике клинкера и снижается температура горячего воздуха. Из-за избытка жидкой фазы наблюдалось ухудшение качества клинкерной обмазки, защищающей футеровку от разрушения.

### **§ 3. Формирование факела при обжиге клинкера**

Наибольший интерес при численном моделировании теплообмена во вращающейся печи представляют размеры и форма диффузионного факела. Обычно различают два типа диффузионного факела – короткий "жесткий" и длинный "вялый".

Для образования короткого факела обычно применяют большие скорости вылета природного газа из топливного сопла порядка 450 м/с, создавая при этом дополнительную крутку потока воздушными струями для лучшего смешения топлива с воздухом. Короткий факел обеспечивает интенсивную теплоотдачу к обжигаемому слою, что необходимо при повышенной загрузке клинкером печей "сухого" способа производства.

Наилучший вид факела в печах "мокрого" способа производства не определен [48]. В цементном производстве обжиг клинкера ведется как на коротком, так и на длинном факеле. При коротком факеле может быть повышена активность клинкера за счет меньшего времени пребывания материала в зоне вы-

соких температур. В то же время утверждается, что с целью предотвращения прожога футеровки и снижения теплотерь желательно работать на удлиненном факеле, имеющем высокую степень черноты [67].

Длинный "вялый" факел формируется при пониженной скорости вылета природного газа из горелки. Результаты численного эксперимента, представленные на рис. 8.6, свидетельствуют о сильном воздействии выталкивающей силы на форму вялого факела, образованного при вылете топлива вдоль оси печи со скоростью 150 м/с [65]. Горячие продукты горения, содержащие несгоревшее топливо, под действием выталкивающей силы, возникающей в неизотермической среде, поднимаются вверх к футеровке печи. При этом смешение топлива с воздухом ухудшается и диффузионное горение затягивается, что приводит к появлению химического недожога. Опыт эксплуатации цементных вращающихся печей подтверждает, что при скорости вылета природного газа менее 200 м/с имел место недожог топлива до 3 % [68].

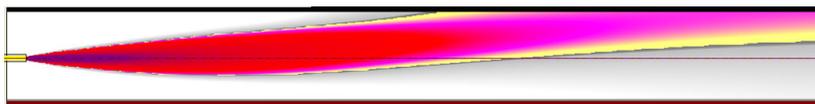


Рис. 8.6. Длинный "вялый" факел в вертикальном продольном сечении печи при подаче топлива вдоль ее оси (наклон печи условно не показан)

По-видимому, для вращающихся печей "мокрого" способа производства более приемлемым является диффузионный факел с конфигурацией, промежуточной между "жесткой" и "вялой". Например, таким может быть факел, изображенный на рис. 8.2. Длина факела 26,5 м, полученная при диаметре топливного сопла 120 мм и скорости вылета топлива 300 м/с, находится в хорошем согласии с теоретической формулой (7.28). Необходимо, чтобы диффузионный факел оптимальной длины обеспечивал

полное сгорание топлива и, в то же время, не приводил к чрезмерному перегреву обжигаемого клинкера.

В эксплуатационной практике часто применяют разные способы изменения положения зоны горения в печи при необходимости повысить или уменьшить интенсивность тепловой обработки клинкера. Технологический материал в обжигаемом слое перемещается вдоль длинной печи в течение нескольких часов, и по разным причинам его подготовка к стадии спекания может завершаться преждевременно или несколько запаздывать. Чтобы устранить такие отклонения от предписанного режима тепло-технологической работы, оператор обычно воздействует на длину диффузионного факела, изменяя, например, скорость вылета топлива из горелки, и таким образом смещает зону повышенной теплоотдачи газов вдоль печи. Диапазон регулирования длины факела можно заметно расширить, устанавливая горелку с наклоном вниз по отношению к продольной оси печи.

Благоприятные условия регулирования длины диффузионного факела в цементной печи "мокрого" способа производства создаются применением двухканальной горелки, в которой топливное сопло центрального канала имеет круглое поперечное сечение, площадь которого примерно вдвое больше площади выходного сечения соосного с ним кольцевого канала [69]. Распределяя подачу природного газа по параллельным каналам горелки, оператор может обеспечить необходимую скорость вылета топлива, которая приведет к формированию факела требуемой длины. Вылет природного газа из кольцевого канала рекомендуется осуществлять в виде отдельных струй, что ускоряет воспламенение и смешение с воздухом центральной низкоскоростной топливной струи.

Длинный факел образуется при условии, что через центральный канал подается примерно половина общего расхода газообразного топлива. Увеличение подачи топлива через кольцевой канал и снижение его расхода через центральный канал

горелки приводит к повышению средней скорости топливной струи, что вызывает интенсификацию диффузионного горения и соответствующее укорочение диффузионного факела. При коротком факеле рекомендуется применять минимальный наклон горелки. С удлинением факела вертикальный угол наклона горелки к продольной оси печи следует увеличивать.

Примером могут служить результаты численного эксперимента при подаче природного газа через кольцевой канал со скоростью 429 м/с, показанные на рис. 8.7, а. Диффузионный факел длиной 22,5 м практически ложится на продольную ось вращающейся печи при вертикальном угле наклона горелки  $4^\circ$ .

Факел удлиняется до 36,5 м при одновременной подаче 40 % природного газа по центральному каналу со скоростью 85 м/с и 60 % по кольцевому каналу со скоростью 255 м/с. Чтобы обеспечить полное сгорание топлива на расчетном участке печи, угол наклона горелки в этом случае увеличен до  $8^\circ$ .

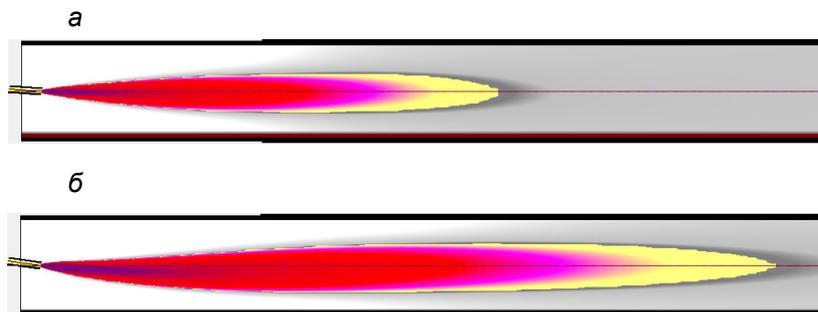


Рис. 8.7. Формирование "жесткого" (а) и "вялого" (б) факела при наклоне двухканальной горелки к продольной оси печи соответственно на  $4^\circ$  и  $8^\circ$  (наклон печи условно не показан)

Приведенный пример показывает, что диффузионный факел, образованный во вращающейся печи двухканальной горелкой с переменным вертикальным углом наклона, допускает управляемое изменение своей длины примерно в полтора раза.

#### **§ 4. Тепломассоперенос в печи обжига керамзита**

Керамзитовый гравий получают обжигом легкоплавкой глины при температуре до 1200 °С. Высокая пористость гранул керамзита, улучшающая его теплоизоляционные свойства, достигается созданием в конце процесса обжига "теплого удара", который придает пластичность и газонепроницаемость поверхностным слоям гранул, одновременно обеспечивая внутри них интенсивный переход в газообразное состояние и расширение органических примесей.

Во вращающихся печах, где сырьевые гранулы обжигаются в объеме слоя, практически не ограниченного стенками, результаты процесса их вспучивания и качество керамзита непосредственно зависят от способа сжигания и характера горения топлива. Так как форма, длина, положение и температура факела, скрытого футерованным вращающимся корпусом печи, не доступны для наблюдений и измерений, эксплуатационные тепло-технологические условия вспучивания керамзита могут заметно отклоняться от оптимальных.

Для обжига керамзита часто применяются горелочные устройства, первоначально предназначенные для других технологических целей. Как правило, воздух подается в печь холодным через каналы горелки, не выдерживающие высокой температуры, а теплота, уносимая из печи обожженным керамзитом, полезно не используется. Поддержание температуры, необходимой для вспучивания гранул, в таком случае осуществляется за счет перерасхода топлива.

Исследовать тепловую работу вращающейся печи возможно с помощью математического моделирования взаимосвязанных процессов горения топлива и радиационно-конвективного теплообмена при турбулентном движении воздуха и газообразных продуктов горения. Специально разработанная математическая модель и моделирующая компьютерная программа по-

зволили поставить численные эксперименты с целью поиска эффективных эксплуатационных условий обжига керамзита [70].

В качестве объекта численного моделирования выбрана вращающаяся печь длиной 40 м с диаметром корпуса 2,5 м при толщине шамотной футеровки 230 мм, угле наклона продольной оси печи к горизонту  $3,5^\circ$  и частоте вращения 0,27 рад/с (2,6 об/мин). Производительность по керамзиту задана равной 7 т/ч при расходе природного газа  $800 \text{ м}^3/\text{ч}$  с теплотой сгорания  $34800 \text{ кДж/м}^3$ . Воздух, нагретый до  $320 \text{ }^\circ\text{C}$ , подавался по всему свободному поперечному сечению печи при коэффициенте избытка 1,1. Влажность глиняных гранул, поступающих в печь, принята равной 11%.

Трехмерная математическая модель учитывала наличие слоя обжигаемого материала, занимающего четверть окружности печи. Стационарное горение природного газа в диффузионном факеле моделировалось дифференциальными уравнениями (7.32) и (7.30) переноса компонентов горения. Дополнительное дифференциальное уравнение массопереноса позволило рассчитать увеличение концентрации водяного пара в газах и соответствующее снижение их температуры при испарении влаги из поступающих в печь сырьевых гранул.

При расчете температуры внутренней горячей поверхности стен определялись тепловые потоки к ним от газов конвекцией и излучением. Учитывалось также прямое переизлучение футеровки на обжигаемый материал и температурные скачки, возникающие в ней при периодическом поступлении вращающихся стен под слой керамзита. В процессе численного эксперимента приходилось рассчитывать и уточнять физические свойства газовой среды и технологического материала, изменяющиеся в процессе нагрева, обжига и вспучивания гранул.

Средняя температура  $t_k$  слоя обжигаемого керамзита определялась без учета неравномерности прогрева гранул. Его массовая теплоемкость  $c_k$ , Дж/(кг·К), вычислялась по формуле:

$$c_k = 735 + 0,5 t_k - 0,000074 t_k^2.$$

Для численного решения на персональном компьютере системы из двенадцати дифференциальных уравнений в более чем 200 тысячах узлов сетки методом полинейной прогонки потребовалось выполнить свыше 12 тысяч итераций, что обеспечило высокую точность вычисления параметров газообразной среды по всему объему печи.

Результаты численного эксперимента позволяют детально исследовать процессы движения газов, горения и теплообмена, составляющие в совокупности тепловую работу обжиговой печи. Представление о форме и размерах диффузионного факела в обжиговой печи дает его графическое изображение на рис. 8.8.

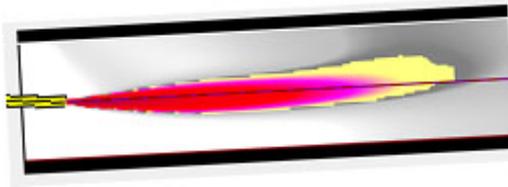


Рис. 8.8. Диффузионный факел в обжиговой печи при высокой скорости вылета топлива и вертикальном угле наклона горелки  $3,5^\circ$

Чтобы сформировать короткий факел, создающий эффективный "тепловой удар", в математической модели предусмотрена подача природного газа с высокой скоростью 434 м/с через четыре сопла, занимающих часть окружности кольцевой щели, внутренний и наружный диаметры которой равнялись соответственно 100 и 107,2 мм. Выходное сопло горелки располагалось на расстоянии 800 мм от обреза печи.

Угол наклона горелки мало сказывается на теплоотдаче "жесткого" факела, поэтому в данном случае выбран простейший вариант – горизонтальное положение горелки, при котором угол ее наклона к продольной оси печи составляет  $3,5^\circ$ . Как по-

казывает изображение факела на рис. 8.8, топливо сгорает полностью на участке печи длиной 7,3 м.

На рис. 8.9 представлены расчетные распределения средней температуры слоя обжигаемых гранул и средней температуры газообразной среды по длине вращающейся печи.

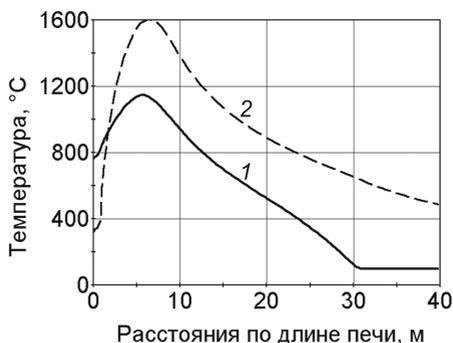


Рис. 8.9. Расчетная средняя температура слоя обжигаемых гранул (1) и газов (2) в поперечных сечениях обжиговой печи при горении природного газа в коротком "жестком" факеле

Согласно кривой 1, после поступления влажных гранул в печь происходит их сушка при температуре 100 °C на участке длиной 9 м. Затем осуществляется нагрев слоя до максимальной температуры, в области которой поверхностные слои гранул переходят в пластичное состояние и осуществляется вспучивание керамзита. Наконец, вблизи горячего конца печи на участке длиной 5 м происходит охлаждение керамзита до температуры ниже 800 °C воздухом, подаваемым в печь.

Кривая 2 показывает распределение по длине печи средней температуры газов, достигающей 1600 °C при заданном избытке воздуха. Расчетная температура газов на выходе из вращающейся печи 488 °C хорошо согласуется с ее эксплуатационными значениями, что подтверждает корректность примененного метода численного моделирования радиационного переноса теплоты в селективной газовой среде (см. гл. 5 и 6).

Максимальная температура на фронте пламени в зонах вспучивания и охлаждения керамзита достигает значений 1800...2000 °С, которые заметно превышают среднюю температуру газовой среды. Иллюстрацией изменения температуры в поперечных сечениях печи служат кривые на рис. 8.10.

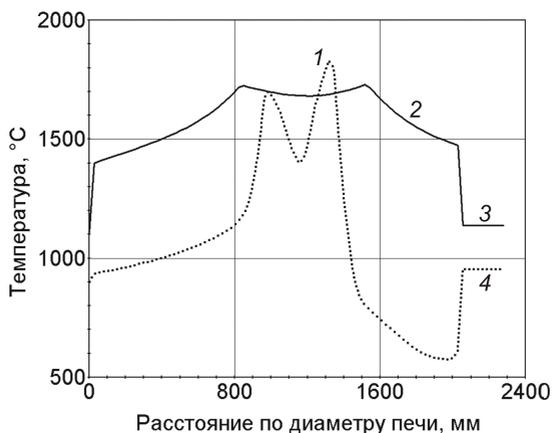


Рис. 8.10. Распределение температуры среды по нормали к поверхности обжигаемого слоя в поперечных сечениях печи на расстоянии от горелки: 1 – 1180 мм, 2 – 5600 мм; 3, 4 – температура слоя обжигаемого керамзита

Как показывает кривая 1, вблизи горелки в зоне охлаждения керамзита отчетливо выделяются две области повышенной температуры газов, возникающие в результате интенсивного тепловыделения на фронте пламени. Несимметричность кривой 1 относительно оси печи можно объяснить в основном неравномерностью подачи топлива через сопла, размещенные по окружности кольцевого канала горелки, и воздействием выталкивающей силы на неизотермичную газообразную среду.

В зоне вспучивания при удалении от горелки на 5,6 м распределение температуры в поперечном сечении факела, представленное кривой 2, становится более сглаженным.

## § 5. Диффузионный факел в стекловаренной печи

Регенеративную стекловаренную печь с возвратной схемой движения газов, при которой окна для подачи воздуха к горелкам и для отвода продуктов горения располагаются по горизонтали на фронтальной стене печи, принято называть печью с подковообразным пламенем. На рис. 8.11 показано размещение регенератора и горелочных устройств, направление движения продуктов горения, шихты и стекломассы в печах такого типа.

Бассейн печи конструктивно разделен на две части – варочную 1 и студочную 2. В варочной части находятся зоны плавления шихты и осветления расплавленной стекломассы. Загрузку шихты на поверхность бассейна осуществляют через отверстия, расположенные в боковых стенах вблизи горелок. Перед выходом из рабочего пространства печи дымовые газы проходят над шихтой, температура которой ниже температуры варки стекломассы примерно на 200 К, что способствует их более глубокому охлаждению.

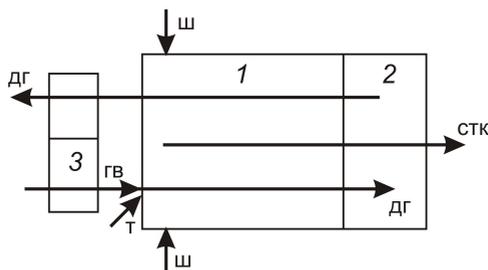


Рис. 8.11. Тепловая схема стекловаренной печи с подковообразным пламенем:  
1 – варочная часть; 2 – студочная часть; 3 – регенератор; ш – шихта;  
стк – стекломасса; т – топливо; гв – горячий воздух; дг – дымовые газы

Для нагрева подаваемого на горение воздуха газами, выходящими из печи, предусмотрен регенератор 3, в котором смена потоков охлаждаемых газов и нагреваемого воздуха происходит через каждые 30 минут. Соединительные каналы поочередно служат воздушными влетами для подачи в печь воздуха, нагре-

того в регенераторе, и для отвода из печи в регенератор продуктов горения топлива. При каждом переключении регенератора природный газ начинает поступать в те горелочные устройства, которые расположены под рабочим воздушным влетом.

Математическое моделирование теплового режима в бассейне печи зональным методом показало [71], что для достижения оптимальных условий варки стекломассы, длина топливного факела не должна выходить за пределы прямого хода потока газов. Однако тепломассообменные процессы над бассейном стекломассы, определяющие диффузионное горение природного газа, не были достаточно полно изучены. Таким образом, диффузионное горение природного газа над бассейном стекломассы при подковообразном движении газов становится актуальной задачей численного исследования.

В качестве объекта численного моделирования выбрана печь с бассейном длиной 5,2 м и шириной 3 м. На рис. 8.12 представлен вид на фронтальную стену печи с прямоугольными окнами в ней для ввода горячего воздуха и отвода газов. Там же схематично изображен продольный разрез области численного моделирования, имеющей достаточно сложную конфигурацию.

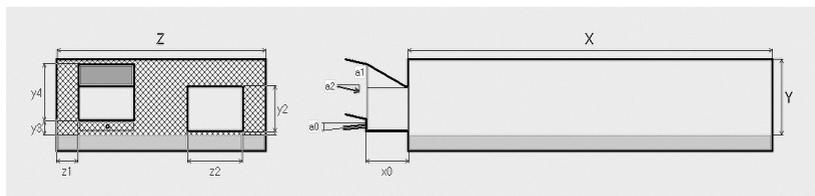


Рис. 8.12. Изображение стекловаренной печи на экране монитора при вводе исходных данных для численного эксперимента

Природный газ с теплотой сгорания  $35500 \text{ кДж/м}^3$  подается в количестве  $180 \text{ м}^3/\text{ч}$  со скоростью  $102 \text{ м/с}$  через сопло диаметром  $25 \text{ мм}$  в воздушный влет, нижняя часть которого образует своеобразный предтопок длиной  $600 \text{ мм}$ . Подводу топлива придан наклон вверх под углом  $5^\circ$ . Свод воздушного влета установ-

лен под углом  $25^\circ$  к горизонтали, в результате чего поток воздуха, нагретого в регенераторе до  $1000^\circ\text{C}$ , приобретает импульс, направленный вниз к бассейну печи. Температура стекломассы в бассейне принята равной  $1420^\circ\text{C}$ , температура плавления шихты на поверхности стекломассы  $1220^\circ\text{C}$ .

На рис. 8.13 показано построение сетки в продольном сечении печи. Общее число узлов неравномерной сетки в объеме воздушного влета и печи составило около 180 тысяч. Ячейки сетки имеют наименьшие размеры порядка 6 мм в отверстии топливного сопла и примерно такие же размеры вблизи него по длине печи, что позволило сбалансировать расходы подаваемого и сгоревшего топлива и обеспечило, в конечном счете, приемлемую точность численного решения инженерной задачи. Наибольший размер ячеек сетки по длине печи не превышал 100 мм, а по ширине и высоте печи 55 мм.

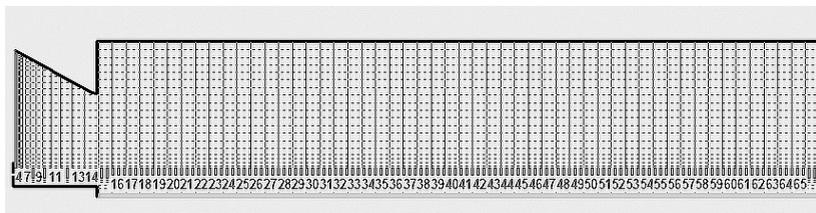


Рис. 8.13. Построение сетки по длине стекловаренной печи и воздушного влета

Компьютерная реализация математической модели позволила найти значения скорости, давления, температуры и концентрации компонентов газообразной среды во всех узлах сетки. Полученные результаты численного эксперимента оказались несколько неожиданными. Как показывает графическое изображение распределения концентрации топлива, построенное на рис. 8.14, область горения в стекловаренной в печи почти в три раза короче теоретической длины прямоточного диффузионного факела, рассчитанной для этих условий по формуле (7.28).

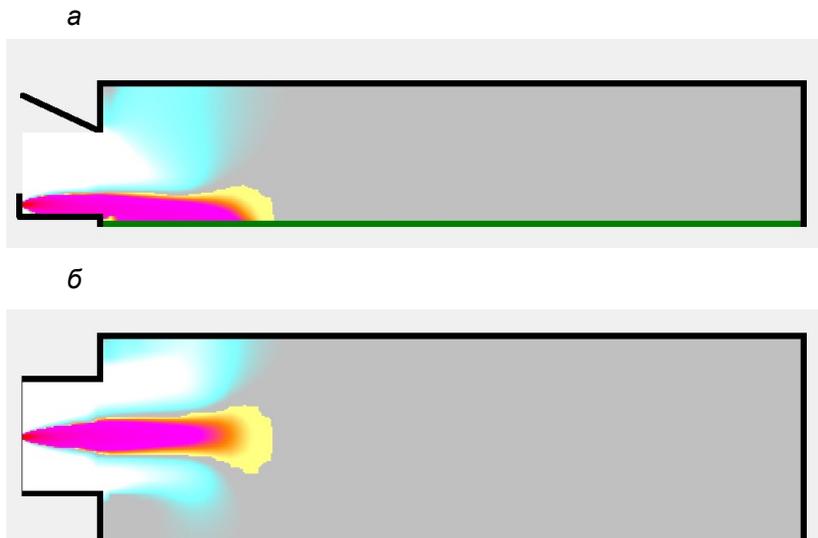


Рис. 8.14. Вид на диффузионный факел в стекловаренной печи с подковообразным движением газов сбоку(а) и сверху (б)

На рис. 8.15 показано изменение температуры газообразной среды вдоль горизонтальной линии, проведенной от топливного отверстия к задней стене стекловаренной печи.



Рис. 8.15. Изменение температуры газовой среды по длине печи на уровне горелки

Горение природного газа в коротком факеле в среде высоко нагретого воздуха приводит к предельно высокой температуре области горения, достигающей 2300...2500 °С на фронте пламени. За пределами короткого факела в застойной части рабочего пространства печи температура газов постепенно понижается, приближаясь к температуре поверхности расплавленной стекломассы. Неравномерность распределения температуры продуктов горения проявляется также по ширине и высоте печи. Расчетная температура газов в узлах сетки на выходе из рабочего пространства стекловаренной печи находится в диапазоне от 1350 °С до 1500 °С.

Пониженный уровень температуры в застойной части рабочего пространства, позволяет при эксплуатации стекловаренных печей с подковообразной схемой движения газов создавать зону студки в конце бассейна расплавленной стекломассы.

## § 6. Способ вычисления турбулентной вязкости

При численном моделировании диффузионного горения в стекловаренной печи особенно остро встала проблема выбора и применения работоспособной модели турбулентности. Стандартная и реализуемая диссипативные модели не обеспечили сходимости итераций при решении системы взаимосвязанных уравнений в сложных условиях подковообразного потока высокотемпературных газов. Поэтому был применен новый алгоритм вычисления турбулентной вязкости, в основу которого положено выражение, представляющее собой, модификацию формулы (3.22):

$$v_T = C_\mu \sqrt{k_T \varepsilon_T / e_T} / e_T . \quad (8.1)$$

Здесь символ  $e_T$  обозначает отношение скорости диссипации энергии турбулентности к величине кинетической энергии турбулентности ( $e_T \equiv \varepsilon_T / k_T$ ). Его значения определялись по дифференциальному уравнению, полученному в [72] преобразованием уравнений (3.23) и (3.25) стандартной модели турбулентности:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho u e_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v e_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w e_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{эф} \frac{\partial e_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{эф} \frac{\partial e_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{эф} \frac{\partial e_T}{\partial z} \right) - \\
& - \frac{2}{k_T} (\mu_{эф} - \sigma_1 \mu_T) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_T \frac{\partial e_T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_T \frac{\partial e_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_T \frac{\partial e_T}{\partial z} \right) \right] = \\
& = \rho e_T [(c_{\varepsilon 1} - 1) G_T / k_T - (c_{\varepsilon 2} - 1) e_T] - \\
& - 2 (\mu_{эф} - 2 \sigma_1 \mu_T) \left[ \frac{\partial^2 e_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_T}{\partial z^2} \right] - \\
& - 2 \sigma_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial e_T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial e_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_T \frac{\partial e_T}{\partial z} \right) \right] - \\
& - 2 \sigma_1 \rho \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_T \frac{\partial e_T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_T \frac{\partial e_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_T \frac{\partial e_T}{\partial z} \right) \right] - \\
& - \sigma_1 \frac{e_T}{v_T} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial v_T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial v_T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_T \frac{\partial v_T}{\partial z} \right) \right]. \quad (8.2)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_\varepsilon$ ,  $c_{\varepsilon 1}$  и  $c_{\varepsilon 2}$  – эмпирические коэффициенты стандартной диссипативной модели, и для краткости применено обозначение

$$\sigma_1 = 1 - 1/\sigma_\varepsilon.$$

При дискретизации этого дифференциального уравнения в соответствии с обобщенной формой (1.17) его правая часть преобразуется в свободный член  $d_T$  алгебраического уравнения с разностями "против потока". Несмотря на кажущуюся громоздкость, дискретный аналог уравнения (8.2) создает, как правило, устойчивую сходимость итераций.

Результаты применения такого подхода к вычислению турбулентной вязкости в стекловаренной печи с подковообразным пламенем представлены на рис. 8.16 в виде кривой изменения турбулентного аналога  $v_T$  кинематического коэффициента вязкости вдоль горизонтальной линии, проведенной от топливного сопла к задней стене стекловаренной печи.

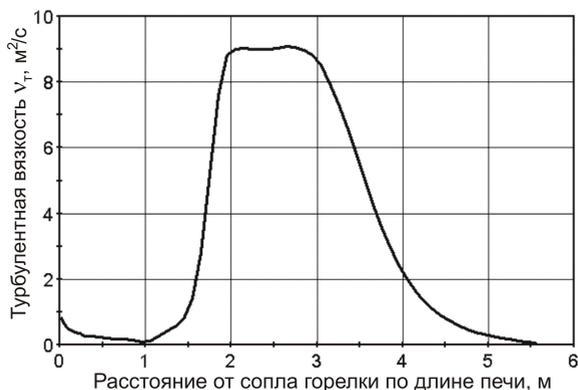


Рис. 8.16. Изменение турбулентного аналога кинематического коэффициента вязкости газовой среды по длине печи на уровне горелки

Кривая на этом рисунке показывает, что на расстоянии 1...1,4 м от фронтальной стены печи и окна воздушного влета происходит многократное возрастание турбулентной вязкости потока газов вследствие его торможения в тупиковой части рабочего пространства печи. Интенсивность турбулентного смешения природного газа с воздухом при этом существенно повышается, что и приводит в итоге к сгоранию топлива в экстремально коротком диффузионном факеле.

Следует отметить, что в приведенных примерах численного моделирования не учитывалось запаздывание воспламенения природного газа, вылетающего из горелки. Поэтому полученные в них оценки размеров области горения содержат некоторую погрешность, относительная величина которой возрастает с уменьшением длины диффузионного факела.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Некоторым читателям, просмотревшим эту книгу, хотя бы бегло, освоение математического моделирования может показаться непосильным делом из-за обилия формул и уравнений. Нужно все же иметь в виду, что затраченные усилия окупятся при реализации теоретически неограниченных возможностей численных методов исследования сложных высокотемпературных теплотехнологических процессов.

Вообще говоря, вовсе не требуется запоминать в деталях все уравнения изучаемых математических моделей. Нужно лишь понимать их структуру и физическое содержание. В то же время, безусловно необходимо без искажений трансформировать в программный код теоретически обоснованные алгоритмы решения дискретных уравнений. Этапы составления, отладки и компьютерной реализации моделирующих программ придают практическую значимость сухим формулам математических моделей и потому играют особо важную роль в их освоении.

Современная среда объектно-ориентированного программирования, например такая, как в Delphi 7, позволяет постепенно усложнять компьютерную программу по мере изучения теоретического материала. В частности, получив первые результаты численного моделирования ламинарного движения газовой среды, следует добавить в программу алгоритм расчета турбулентной вязкости, затем алгоритмы массопереноса, диффузионного горения, конвективного, радиационного и, наконец, радиационно-конвективного теплообмена. В такой работе невозможно обойтись без творческого подхода, без умения анализировать и улучшать расчетные результаты, полученные при отладке компьютерной программы.

Возможные замечания, касающиеся содержания монографии, принимаются авторами по e-mail: kousnezov@mail.ru.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

- $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $A_r$  – поглощательная способность газов при равновесном излучении;  
 $A_\infty$  – поглощательная способность бесконечной среды в антисером спектре;  
 $b$  – коэффициент теплоусвоения,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ;  
 $c$  – удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  
 $c_i$  – массовая концентрация  $i$ -го компонента в смеси,  $\text{кг}/\text{кг}$ ;  
 $c_0$  – скорость света,  $\text{м}/\text{с}$ ;  
 $C$  – расчетная концентрация в факеле,  $\text{кг}/\text{кг}$ ;  
 $\Delta C$  – избыточная концентрация в факеле,  $\text{кг}/\text{кг}$ ;  
 $d_0$  – диаметр топливного сопла, внутренний диаметр трубы,  $\text{м}$ ;  
 $D$  – коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $D'$  – величина источника массы, взятого с обратным знаком,  $\text{кг}/(\text{м}^3\text{с})$ ;  
 $E$  – поверхностная плотность потока излучения: собственного ( $E_{\text{соб}}$ ), падающего ( $E_{\text{пад}}$ ), отраженного ( $E_{\text{отр}}$ ), эффективного ( $E_{\text{эф}}$ ),  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $F$  – площадь поверхности,  $\text{м}^2$ ;  
 $g$  – ускорение свободного падения ( $g = 9,81 \text{ м}/\text{с}^2$ );  
 $G$  – массовый расход,  $\text{кг}/\text{с}$ ;  
 $G_T$  – скорость генерации энергии турбулентности,  $\text{Вт}/\text{кг}$ ;  
 $h$  – вертикальная координата,  $\text{м}$ ;  
 $H$  – энтальпия,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  $\text{J}/\text{kg}$ ;  
 $H_{\text{дис}}$  – теплота диссоциации трехатомных газов,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  
 $I_0$  – интенсивность равновесного излучения,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{ср})$ ;  
 $I_l$  – интенсивность излучения по выделенному направлению,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{ср})$ ;  
 $J$  – поток количества движения,  $\text{Н}$ ;  
 $k$  – локальный коэффициент ослабления,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $k_T$  – коэффициент ослабления излучения твердыми пылевыми частицами,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $k_i$  – средний планковский коэффициент  $i$ -го трехатомного газа,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $k_T$  – кинетическая энергия турбулентности,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  
 $k_{\text{ст}}$  – коэффициент теплопередачи через стенку,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ;  
 $K_p$  – константа равновесия химической реакции  
 $l$  – линейный размер, длина пути смешения,  $\text{м}$ ;  
 $l_\phi$  – длина диффузионного факела,  $\text{м}$ ;  
 $l_{\text{эф}}$  – эффективная толщина излучающего слоя,  $\text{м}$ ;

$m_i$  – вектор плотности потока массы  $i$ -го компонента смеси, кг/(м<sup>2</sup>с);  
 $M$  – масса топлива или воздуха, вступивших в реакции горения, кг/(м<sup>3</sup>с);  
 $n_b$  – массовое стехиометрическое соотношение "воздух-топливо";  
 $p$  – статическое давление, Па;  
 $\tilde{p}$  – функция давления, Па;  
 $p'$  – поправка давления, Па;  
 $p_o$  – давление при нормальных условиях ( $p_o = 760$  мм рт. ст.), Па;  
 $p_i$  – объемная доля  $i$ -го компонента в газовой смеси;  
 $q$  – плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $q_n$  – плотность результирующего потока излучения, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $Q_n$  – результирующий поток лучистой энергии, Вт;  
 $Q_v$  – тепловыделение при химических реакциях горения, Вт/м<sup>3</sup>;  
 $Q_{н}^p$  – низшая теплота сгорания топлива, Дж/кг;  
 $r$  – радиальная координата, м;  
 $\Delta r$  – радиальные шаги и размеры ячеек сетки, м;  
 $R$  – радиус струи, стен печи или сферической поверхности, м;  
 $S_{ij}$  – тензор скоростей деформации, с<sup>-1</sup>;  
 $t$  – температура, °С;  
 $T$  – термодинамическая температура, К;  
 $T_o$  – температура газа при нормальных условиях ( $T_o = 273,15$  К), К;  
 $T_n$  – лучистая температура, К;  
 $T_s$  – определяющая температура в ограниченном объеме газов, К;  
 $T_\infty$  – определяющая температура в неограниченной среде, К;  
 $u$  – продольная компонента скорости, м/с;  
 $u_*$  – динамическая скорость, м/с;  
 $U_n$  – объемная плотность лучистой энергии, Дж/м<sup>3</sup>;  
 $v$  – вектор линейной скорости, м/с;  
 $v$  – поперечная или радиальная компонента скорости, м/с;  
 $V$  – объем, м<sup>3</sup>;  
 $w$  – поперечная или тангенциальная компонента скорости, м/с;  
 $x$  – продольная координата, м;  
 $X$  – степень диссоциации трехатомного газа;  
 $y$  – поперечная координата, м;  
 $z$  – поперечная координата, м;

$\alpha$  – локальный коэффициент поглощения,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $\alpha_r$  – интегральный коэффициент поглощения газов,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $\alpha_n$  – средний планковский коэффициент поглощения,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $\alpha_o$  – коэффициент собственного излучения ослабляющей среды,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $\beta$  – коэффициент изотропного рассеяния,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $\delta$  – толщина пограничного слоя, м;  
 $\delta_o, \delta_n, \delta_p$  – толщина вязкого, буферного или равновесного подслоев, м;  
 $\varepsilon$  – относительная деформация; степень черноты;  
 $\varepsilon_r$  – скорость диссипации энергии турбулентности, Вт/кг;  
 $\Upsilon_{l,l}$  – индикатриса рассеяния;  
 $\eta$  – безразмерная радиальная координата;  
 $\varphi$  – азимутальный угол, рад;  
 $k$  – универсальная постоянная пристенной турбулентности;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  
 $\mu$  – динамический коэффициент вязкости, Па·с;  
 $\nu$  – частота электромагнитных волн,  $\text{с}^{-1}$ ;  
     кинematicкий коэффициент вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $\theta$  – полярный угол в сферической системе координат, рад;  
 $\rho$  – плотность среды,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\rho_o$  – плотность при нормальных условиях,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/\text{м}^2\text{К}^4$ );  
 $\sigma_{\text{ст}}$  – напряжение трения на поверхности стенки, Па;  
 $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений, Па;  
 $\tau$  – время, с;  
 $\Delta t$  – интервал времени, с;  
 $\omega$  – телесный угол, ср;  
 $\omega$  – угловая скорость, рад/с;  
 $\psi_{l,j}$  – угловой коэффициент облучения;  
 $\zeta$  – коэффициент пристенного переноса, м/с.

### **Индексы:**

ак – аккумуляция;  
в – воздух;  
г – газы;  
гр – граница;  
л – лучистый;  
м – технологический материал;  
нст – нестационарный;  
о – в отверстии топливного сопла;  
ок – окислитель;  
окн – в "окнах" спектра;  
п – планковский;  
пл – фронт пламени;  
пр – продукты горения; приведенный;  
сл – слой;  
ст – стенка;  
стр – струйный;  
т – топливо; турбулентный;  
ф – факел;  
эф – эффективный;  
*m* – на оси струи;  
CO<sub>2</sub> – углекислый газ;  
H<sub>2</sub>O – водяной пар;  
+ – безразмерная величина;  
∞ – в неограниченной среде.

### **Числа подобия:**

Gr – число Грасгофа газа ( $Gr \equiv l^3 \Delta T g / \nu^2 T$ );  
Nu – число Нуссельта ( $Nu \equiv \alpha l / \lambda$ );  
Pe – число Пекле ( $Pe \equiv ul / D$ );  
Pr – число Прандтля ( $Pr \equiv \nu / a$ );  
Re – число Рейнольдса ( $Re \equiv ul / \nu$ );  
Sc – число Шмидта ( $Sc \equiv \nu / D$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. – М.: Логос, 2005.
2. Госмен А. Д. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел, Д. Б. Сполдинг, М. Вольфштейн. – М.: Мир, 1972.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкостей / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. Арутюнов В. А. Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей / В. А. Арутюнов, В. В. Бухмиров, С. А. Крупенников. – М.: Metallurgia, 1990.
6. Швыдкий В. С. Элементы теории систем и численные методы моделирования процессов тепломассопереноса / В. С. Швыдкий, Н. А. Спиринов, М. Г. Ладыгичев, Ю. Г. Ярошенко, Я. М. Гордон. – М.: Интернет Инжиниринг, 1999.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980.
8. Аникеев А. А. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики / А. А. Аникеев, А. М. Молчанов, Д. С. Янышев. – М.: Либроком, 2010.
9. Ferziger J. H. Computational methods for fluid dynamics / J. H. Ferziger, M. Perić. – Berlin, etc.: Springer, 2002.
10. Кузнецов В. А. Математическая модель свободной конвекции воздуха в комнате / В. А. Кузнецов, В. П. Кожевников // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2008. № 7-8. – С. 15-27.
11. Кузнецов В. А. Численный метод решения дифференциальных уравнений движения среды / В. А. Кузнецов, М. В. Грачев // Математические методы в химии и химической технологии ММХ-9. Ч.1. – Тверь: ТГТУ, 1995. – С. 35-36.
12. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. – М.: Мир, 1973.
13. Юн А. А. Расчет и моделирование турбулентных течений / А. А. Юн, Б. А. Крылов. – М.: Изд-во МАИ, 2007.
14. Townsend A. A. Equilibrium layers and wall turbulence / A. A. Townsend // J. Fluid Mechanics. 1961. Vol. 11. Pt 1. – P. 97-120.
15. van Driest E. R. On turbulent flow near a wall / E. R. van Driest // J. Aeronautical Sciences. 1956. Vol. 23. No. 11. – P. 1007-1011.
16. Кузнецов В. А. Уточнение гипотез пристенной турбулентности / В. А. Кузнецов // Инж.-физ. журнал. 1986. Т. 50. № 6. – С. 917-922.
17. Гольдштик М. А. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. – Новосибирск: Наука, 1977.
18. Жукаускас А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости / А. Жукаускас, А. Шланяускас. – Вильнюс: Минтис, 1973.

19. Пядишус А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости / А. Пядишус, А. Шланчяускас. – Вильнюс: Мокслас, 1987.
20. den Toonder J. M. J. Reynolds number effects in a turbulent pipe flow for low to moderate Re / J. M. J. den Toonder, F. T. M. Nieuwstadt // *Phys. Fluids*. 1997. Vol. 9. No. 11. – P. 3398-3409.
21. Кузнецов В. А. Численное моделирование конвективной теплоотдачи турбулентного потока газов / В. А. Кузнецов // *Теор. основы хим. технологии*. 2017. Т. 51. № 6. – С. 1-8.
22. Пейтел В. К. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса / В. К. Пейтел, В. Роди, Г. Шойерер // *Аэрокосмическая техника*. 1986. № 2. – С. 184-197.
23. Shih T.-H. A new  $k$ - $\epsilon$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows / T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu // *Computers Fluids*. 1995. Vol. 24. No. 3. – P. 227-238.
24. Белов И. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости / И. А. Белов, С. А. Исаев, В. А. Коробков. – Л.: Судостроение, 1989.
25. Тепловой расчет котельных агрегатов. Нормативный метод. – М.: Энергия, 1973.
26. Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М.: БАСТЕТ, 2010.
27. Шорин С. Н. Теплопередача / С. Н. Шорин. – М.: Высшая школа, 1964.
28. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высшая школа, 1982.
29. Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках / А. А. Жукаускас. – М.: Наука, 1982.
30. Тамонис М. Радиационный и сложный теплообмен в каналах / М. Тамонис. – Вильнюс: Мокслас, 1981.
31. Детков С. П. Тепловые процессы в печных агрегатах алюминиевой промышленности / С. П. Детков, А. Е. Еринов. – Киев: Наук. думка, 1987.
32. Handbook of infrared radiation from combustion gases / R. Goulard, A. L. Thomson. – Washington: NASA, 1973.
33. Детков С. П. Базовые данные для расчета радиационных характеристик водяного пара / С. П. Детков, О. А. Брюховских // *Инж.-физ. журнал*. 1986. Т. 51. № 6. – С. 1027-1030.
34. Рязанцев О. А. Аппроксимация радиационных параметров водяного пара / О. А. Рязанцев, В. А. Кузнецов // *Математические методы в технике и технологиях ММТТ-24*. Т. 7. – Саратов: СГТУ, 2011. – С. 138.
35. Трулёв А. В. Способ расчета поглощательных свойств трехатомных газов / А. В. Трулёв, В. А. Кузнецов // *Теплоэнергетика*. 2013. № 6. – С. 55-58.
36. Edwards D. K. Molecular gas band radiation / D. K. Edwards // *Advances in Heat Transfer*. 1976. Vol. 12. – P. 115-193.

37. Росселанд С. Астрофизика на основе теории атома / С. Росселанд. – М.-Л.: ОНТИ, 1936.
38. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа / Б. Н. Четверушкин. – М.: Наука, 1985.
39. Румянцев Г. Я. Граничные условия в методе сферических гармоник / Г. Я. Румянцев // Атомная энергия. 1961. Т. 10. № 1. – С. 26-34.
40. Кузнецов В. А. Математическая модель радиационного теплообмена в селективных газах диффузионного факела / В. А. Кузнецов // Инж.-физ. журнал. 2017. Т. 90. № 2. – С. 381-390.
41. Кузнецов В. А. К расчету теплообмена излучением в поглощающей среде / В. А. Кузнецов // Инж.-физ. журнал. 1980. Т. 38. № 1. – С. 134-139.
42. Кузнецов В. А. О дифференциальных методах расчета радиационного теплообмена / В. А. Кузнецов, О. А. Рязанцев // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2012. № 1-2. – С. 3-12.
43. Адрианов В. М. Дифференциальные методы исследования теплообмена излучением / В. М. Адрианов, Г. Л. Поляк // Инж.-физ. журнал. 1964. Т. 7. № 4. – С. 74-80.
44. Ключников А. Д. Теплопередача излучением в огнетехнических установках / А. Д. Ключников, Г. П. Иванцов. – М.: Энергия, 1970.
45. Блох А. Г. Теплообмен в топках паровых котлов / А. Г. Блох. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
46. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет / В. В. Соболев. – М.: Наука, 1972.
47. Есин О. А. Физическая химия пирометаллургических процессов / О. А. Есин, П. В. Гельд. – Свердловск, М.: Metallurgizdat, 1950.
48. Классен В. К. Обжиг цементного клинкера / В. К. Классен. – Красноярск: Стройиздат, 1994.
49. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М.: Наука, 1966.
50. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р. Зигель, Дж. Хауэлл. – М.: Мир, 1975.
51. Кузнецов В. А. Нестационарная температура стен цементной вращающейся печи / В. А. Кузнецов, А. В. Трулёв // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2012. № 2. – С. 150-153.
52. Meier H. V. Experimental and theoretical investigations of temperature distributions in supersonic boundary layer / H. V. Meier, J. C. Rotta // AIAA Pap. 1970. No. 744.
53. Лапин Ю. В. Внутренние течения газовых смесей / Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец. – М.: Наука, 1989.
54. Hawthorne W. R. Mixing and combustion in turbulent gas jets / W. R. Hawthorne, D. S. Weddell, H. C. Hottel // Third Symposium on Combustion and Flame and Explosion Phenomena. – Pittsburgh, 1949. – P. 266-288.

55. Семикин И. Д. Закономерности факельного процесса при сжигании газа / И. Д. Семикин // Науч. тр. ДМИ. Вып. 33. – Киев: ГИТЛ УССР, 1955. – С. 83-103.
56. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974.
57. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория / И. О. Хинце. – М.: Физматгиз, 1963.
58. Ricou F. P. Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets / F. P. Ricou, D. B. Spalding // J. Fluid Mechanics. 1961. Vol. 11. Pt. 1. – P. 21-32.
59. Кузнецов В. А. Математическое моделирование тепловой работы цементной вращающейся печи / В. А. Кузнецов. – Белгород: БелГТАСМ, 1994.
60. Сполдинг Д. В. Основы теории горения / Д. В. Сполдинг. – М.: Госэнергоиздат, 1959.
61. Теория турбулентных струй / Под ред. Г. Н. Абрамовича. – М.: Наука, 1984.
62. Кузнецов В. Р. Турбулентность и горение / В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. – М.: Наука, 1986.
63. Варнатц Ю. Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ / Ю. Варнатц, У. Маас, Р. Диббл. – М.: Физматлит, 2003.
64. Spalding D. B. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames / D. B. Spalding // 13th Internat. Sympos. Comb. – Pittsburgh, 1970. – P. 649.
65. Кузнецов В. А. Численное моделирование горения и теплообмена в цементной вращающейся печи / В. А. Кузнецов, О. А. Рязанцев, А. В. Трулёв // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2011. № 4. – С. 161-164.
66. Воробьев Х. С. Теплотехнологические процессы и аппараты силикатных производств / Х. С. Воробьев, Д. Я. Мазуров, А. А. Соколов. – М.: Высшая школа, 1965.
67. Классен В. К. Оптимизация процессов обжига цементного клинкера во вращающихся печах / В. К. Классен // Энергосберегающие технологии при производстве цемента. – М.: Гипроцемент наука, 2005. – С.49-54.
68. Вальберг Г. С. Интенсификация производства цемента (обжиг клинкера) / Г. С. Вальберг, И. К. Гринер, В. Я. Мефодовский. – М: Стройиздат, 1971.
69. Трулев А. В. Способ регулирования параметров горения газообразного топлива. Патент № 2517463 / А. В. Трулев, В. М. Коновалов, В. А. Кузнецов // Бюл. изобр. 2014. № 15.
70. Кузнецов В. А. Численное моделирование горения и теплообмена при обжиге керамзита во вращающейся печи / В. А. Кузнецов // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 1. – С. 170-174.
71. Дзюзер В. Я. Проектирование энергоэффективных стекловаренных печей / В. Я. Дзюзер, В. С. Швыдкий. – М.: Теплотехник, 2009.
72. Кузнецов В. А. Применение диссипативной модели турбулентности в неизотермических условиях / В. А. Кузнецов, О. А. Рязанцев // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2010. № 7-8. – С. 29-35.

Научное издание

**Кузнецов Валерий Алексеевич**  
**Трубаев Павел Алексеевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА  
В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ  
УСТАНОВКАХ**

Монография

Подписано в печать 15.09.17. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 15.

Тираж 500 экз.      Заказ      Цена

Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете  
им. В.Г. Шухова

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46